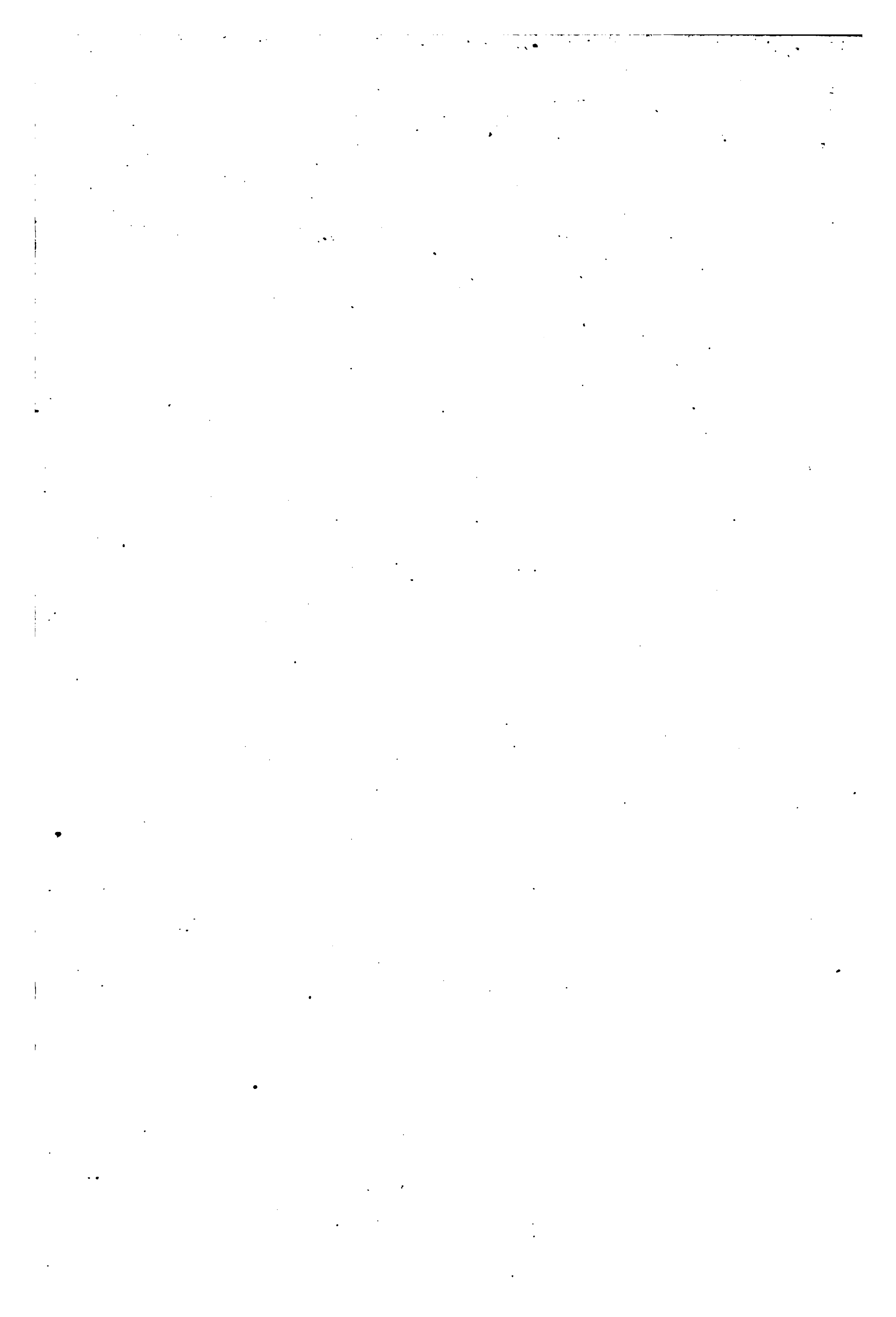




Vorträge

über

Graphische Statik

mit Anwendung auf die

Festigkeits-Berechnung der Bauwerke

von

Wilh. Keck,

Professor an der Techn. Hochschule zu Hannover

als Anhang zu des Verfassers

„Vorträgen über Elasticitätslehre“.

Mit 83 Holzschnitten und 4 Tafeln.

Hannover.

Helwing'sche Verlags-Buchhandlung.

1894.

Hofbuchdruckerei der Gebrüder Jänecke, Hannover.

Vorwort.

Das vorliegende Buch schliefst sich meinen im vorigen Jahre erschienenen „Vorträgen über Elasticitätslehre“ an und bildet eine Ergänzung derselben.

Der erste Abschnitt bespricht als Vorbereitung die wichtigsten Arten der Flächenverwandlung, sodann folgt die Anwendung vom Kraft- und Seileck zur Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Der folgende Abschnitt behandelt die Schwerpunkte, die statischen Momente, Trägheits- und Centrifugalmomente, sowie die Kerne ebener Querschnittsflächen (Formeisen, Mauerpfeiler, Eisenbahnschiene). Die Grundlehren dieser Gegenstände sind in der Elasticitätslehre entwickelt und wurden daher hier nicht noch einmal abgeleitet. Indess werden die gegebenen Erläuterungen zum Verständnisse der beschriebenen Konstruktionen hinreichen. Namentlich sind zu diesem Zwecke einige wichtige Abbildungen aus den „Vorträgen über Elasticitätslehre“ hier wiederum zum Abdrucke gebracht. Gleiches gilt bezüglich des vierten Abschnittes über die Vertheilung von Spannungen und Anstrengungen über einen Querschnitt. Die folgenden beiden Abschnitte behandeln den Balken auf 2 Stützen und das einfache Fachwerk, u. zw. ziemlich unabhängig von den Vorträgen über Elasticitätslehre, während die letzten Abschnitte über Erddruck, Stützmauern und Tonnengewölbe sich denselben naturgemäfs wieder ziemlich eng anschliefsen.

Die zahlreichen Figuren befinden sich meistens im Texte; nur gröfsere Darstellungen, z. B. Kerne von Winkeleisen, ⅂-Eisen, einer Eisenbahnschiene, eines Pfeilers, sowie die Untersuchung

einer Stützmauer und eines Brückengewölbes mit Angabe aller wichtigen Hülfslinien sind auf besonderen Tafeln gezeichnet, die so eingerichtet sind, dass sie sich beim Aufschlagen völlig aus dem Buche herauslegen.

Die benutzten Quellen habe ich durchweg angegeben.

Hannover, im Juni 1894.

Keck.

Inhalt.

Einleitung. Ueber die Ausführung geometrischer Zeichnungen.

Erster Abschnitt.

Einige Arten der Flächen-Verwandlung ebener Figuren.

Zweiter Abschnitt.

Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene.

Dritter Abschnitt.

Schwerpunkte, Trägheitsmomente und Centrifugalmomente ebener Flächen.

Vierter Abschnitt.

Vertheilung der Spannungen und Anstrengungen über einen Querschnitt.

Fünfter Abschnitt.

Biegungsmomente und Querkräfte eines Balkens auf zwei Stützen.

Sechster Abschnitt.

Das einfache Fachwerk.

Siebenter Abschnitt.

Erddruck und Stützmauern.

Achter Abschnitt.

Tonnengewölbe.

Einleitung.

Ueber die Ausführung geometrischer Zeichnungen.

Zeichnungen von befriedigender Genauigkeit erfordern selbstverständlich die Verwendung guten Zeichengeräthes, namentlich harter, scharfer Bleistifte. Wichtige Eck- und Theilpunkte versehe man, um sie deutlich sichtbar zu erhalten, schon beim Auftragen mit Zirkelstichen und umgebe sie mit einem kleinen Kreise, der dann auch später mit dem Nullenzirkel ausgezogen werden kann. Die Uebersichtlichkeit der Figuren gewinnt durch planmäfsige Anwendung verschiedener Farben, indem man etwa das Gegebene schwarz, Hülfslinien blau, das Gesuchte roth auszieht. Muss man sich aber auf nur eine Farbe beschränken, so kann man etwa das Gegebene in vollen Linien darstellen, die Hülfslinien in etwas geringerer Stärke punktiren, das Gesuchte aber stark strichpunktiren. Bei ausgedehnteren Aufgaben ist diese Regel freilich nicht streng durchführbar, vielmehr muss den ausgezogenen Linien sodann ein gröfserer Umfang gewährt werden.

Die Hervorhebung von Flächen kann durch Anlegen mit einem leichten Farbenton oder durch Schraffiren erfolgen, u. zw. gelingt die Gleichmäfsigkeit der Schraffirung am leichtesten, wenn man dicke Striche, aber sehr blasse Tusche verwendet.

Erster Abschnitt.

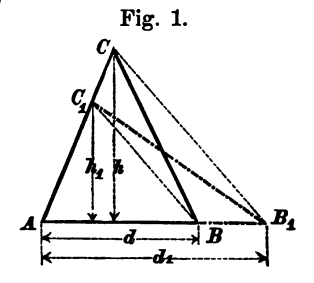
Einige Arten der Flächen-Verwandlung ebener Figuren.

In den Anwendungen der Kräftelehre kommt es häufig vor, dass Kraftgröfsen aus dem Flächeninhalte gegebener Figuren abgeleitet werden müssen, wobei dann in manchen Fällen eine geometrische Flächen-Verwandlung wünschenswerth ist. Es sollen daher die am meisten angewandten Arten der Flächen-Verwandlung hier kurz zusammengestellt werden.

1. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes.

Soll ein Dreieck ABC (Fig. 1) von der Grundlinie d und der Höhe h in ein solches mit der Grundlinie $d_1 = AB_1$ verwandelt werden, so ziehe man $B_1 C$ und dazu parallel BC_1; dann ist C_1 der gesuchte Eckpunkt des neuen Dreiecks AB_1C_1. — Nach der Figur ist nämlich $AC_1 : AC = d : d_1$, also auch $h_1 : h = d : d_1$ oder $\frac{1}{2} d_1 h_1 = \frac{1}{2} dh$. Die Richtigkeit erhellt auch daraus, dass ABC_1 beiden Dreiecken gemeinsam ist, die ergänzenden Dreiecke BC_1C bezw. BC_1B_1 aber flächengleich sind, weil die Spitzen C und B_1 auf einer Parallelen zur gemeinsamen Grundlinie BC_1 liegen.

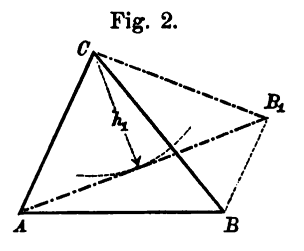
Fig. 1.



Ist die neue Grundlinie d_1 gleich 2 Längeneinheiten, so wird $F = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h_1 = h_1$, d. h. die gefundene Höhe h_1, in Längeneinheiten gemessen, giebt den Inhalt des gegebenen Dreiecks in Flächeneinheiten.

Soll ein Dreieck ABC (Fig. 2) in ein solches von der Höhe h_1 verwandelt werden, so ziehe man um C als Mittelpunkt einen Kreisbogen vom Halbmesser h_1, lege an diesen von A aus eine Berührende, welche durch eine von B aus gezogene, zu AC parallele Gerade in B_1 begrenzt wird. Dann ist offenbar $AB_1C = ABC$, und zugleich hat AB_1C die gewünschte Höhe h_1. (Mit $h_1 = 2$ würde $ABC = AB_1$ sein.) Dies Verfahren ist nur ausführbar, wenn mindestens eine Seite des gegebenen Dreiecks gleich oder gröfser als h_1 ist.

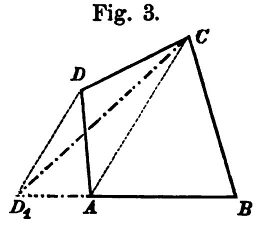
Fig. 2.



2. Verwandlung eines Vierecks.

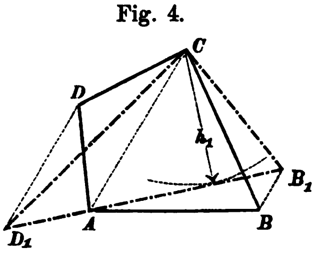
Die Verwandlung eines Vierecks $ABCD$ (Fig. 3) in ein Dreieck erfolgt, indem man eine Diagonale AC zieht und parallel zu ihr den Eckpunkt D des Vierecks nach D_1 verschiebt; dann ist $ACD_1 = ACD$, mithin $D_1BC = ABCD$.

Fig. 3.



Soll die Verwandlung in ein Dreieck von bestimmter Höhe h_1 (Fig. 4) geschehen, so schlägt man wieder mit h_1 als Halbmesser einen Kreisbogen um C und legt an diesen von A aus eine Berührende. Diese muss die Grundlinie, C die Spitze des gesuchten Dreiecks werden; daher zieht man die Diagonale AC und verschiebt parallel mit ihr den Eckpunkt D nach D_1, den Eckpunkt B nach B_1. Dann ist $ACD_1 = ACD$ und $ACB_1 = ACB$; folglich sind auch die Summen gleich, d. h. $D_1B_1C = ABCD$.

Fig. 4.



Die Verwandlung eines Rechtecks $ABCD$ (Fig. 5) in ein solches mit der Grundlinie $d_1 = AB_1$ erfolgt in derselben Weise wie beim Dreiecke (Fig. 1), indem man B_1D und dazu parallel BD_1 zieht; dann ist D_1 der gesuchte Eckpunkt des neuen Rechtecks $AB_1C_1D_1$.

Zur Verwandlung eines Rechtecks $d \cdot h$ in ein Quadrat a^2 (Fig. 6) verlängere man d um h und zeichne über $d + h$ als Durchmesser einen Halbkreis, dann ergiebt sich aus der Figur die Quadratseite a. — Oder man trägt (Fig. 7)

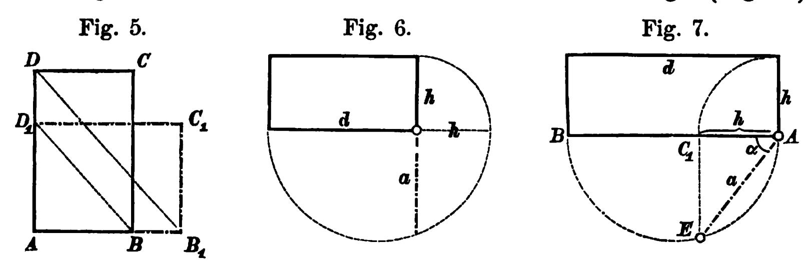


Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.

d und h vom Punkte A aus nach derselben Seite auf und schlägt über d als Durchmesser einen Halbkreis; dann ergiebt sich nach der Figur $AE = a$ als Quadratseite. (Denn es ist $\cos \alpha = AC_1 : AE = h : a$ und zugleich $\cos \alpha = AE : AB = a : d$, also $a^2 = d \cdot h$.)

3. Verwandlung von Vielecken.

Um ein beliebiges Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln, braucht man nur das beim Viereck (Fig. 3) gezeigte Verfahren der Beseitigung eines Eckpunktes mehrfach anzuwenden. In Fig. 8 beseitigt man zunächst den Eckpunkt F, indem man AE zieht und dazu parallel den Punkt F nach F_1 verschiebt. Hiermit ist $ABCDEF$ auf das Fünfeck F_1BCDE zurückgeführt. Man zieht nun F_1D und verschiebt, damit parallel, E nach E_1. Nun geht man auf die rechte Seite der Figur, zieht BD und verschiebt, damit parallel, C nach C_1; dann ist $E_1C_1D \mathrel{\dot=} ABCDEF$.

Fig. 8.

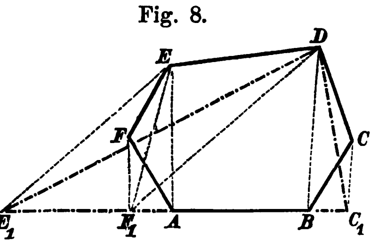
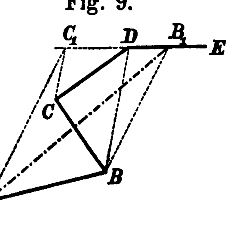


Fig. 9.



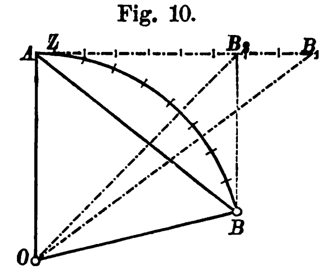
Ausgleichung einer gebrochenen Grenzlinie durch eine Gerade. Der Linienzug $ABCD$ (Fig. 9) soll dergestalt durch eine von A bis zu einem Punkte B_1 der DE zu ziehende Gerade ersetzt werden, dass die Fläche

rechts von AB_1 ebenso grofs bleibt, wie diejenige rechts von $ABCD$ war. Man beseitige zunächst den Eckpunkt C, indem man BD zieht und damit parallel C nach C_1 (in der Verlängerung von DE) verschiebt. Die Gerade BC_1 gleicht die gebrochene Linie BCD aus. Es bleibt nun noch der Knick bei B zu beseitigen, indem man AC_1 zieht und damit parallel B nach B_1 verschiebt; dann ist AB_1 die Ausgleichungslinie.

4. Verwandlung von Kreisausschnitt und Kreisabschnitt in Dreiecke.

Die Fläche des Ausschnittes OAB (Fig. 10) vom Halbmesser $r = OA$ ist bekanntlich $F = \frac{1}{2} r \cdot \widehat{AB}$, kann daher durch ein rechtwinkliges Dreieck OAB_1 dargestellt werden, wenn AB_1 gleich der Bogenlänge AB. Man lege daher bei A eine Berührende an den Kreis und ersetze den Bogen AB durch ein Sehnenvieleck, indem man ein genügend kleines Längenmafs in den Zirkel nimmt und dieses von B aus (nicht von A aus) auf dem Bogen BA abträgt. Bei dieser Abtragung wird die Zirkelspitze nicht auf A treffen; der letzte Zirkelpunkt Z aber vor A ist dann schon der Berührenden AB_1 so nahe, dass er auch als auf ihr liegend angesehen werden kann. Man braucht sich daher um die Länge des Stückes AZ gar nicht zu kümmern, sondern hat nur ebenso viele Zirkelmafse, wie sich von B bis Z ergaben (in der Figur acht), nun auch von Z bis B_1 abzutragen; dann ist annähernd $ZB_1 = \widehat{ZB}$ und $AB_1 = \widehat{AB}$, mithin Dreieck OAB_1 gleich dem Ausschnitte OAB.

Fig. 10.



Der Kreis**abschnitt** $\widehat{AB}\,\overline{BA}$ ist der Unterschied zwischen dem Ausschnitt und dem Dreieck AOB. Zieht man $BB_2 \parallel OA$, so ist $OAB_2 = OAB$; mithin wird das spitzwinklige Dreieck OB_2B_1 gleich dem Kreisabschnitte.

Wären die Zirkelabtragungen nicht mit Fehlern behaftet, so würde die Flächenverwandlung um so genauer werden, je kleiner man das Zirkelmafs nähme. Federung des Zirkels, schiefes Einstechen in das Papier u. dgl. geben aber zu Unrichtigkeiten Anlass, so dass eine zu grofse Zahl der Abtragungen der Genauigkeit nicht förderlich ist. Wählt man das Zirkel-

mafs zu $^1/_6\,r$ oder $^1/_8\,r$, so beträgt die Abweichung zwischen der Sehne und dem Bogen $^1/_{700}$ bzw. $^1/_{1200}$ der Bogenlänge. Eine gröfsere Genauigkeit wird beim Zeichnen aus anderen Rücksichten meist nicht erreichbar und auch nicht nöthig sein, so dass es sich wohl empfiehlt, $^1/_6\,r$ oder $^1/_8\,r$ (nach roher Schätzung) in den Zirkel zu nehmen.

5. Verwandlung von Parabel-Abschnitten in Dreiecke.

Ist A (Fig. 11) der Scheitel einer Parabel, $B\,C$ eine zur Achse derselben rechtwinklige Sehne, so ist die Fläche F des Parabel-Abschnittes $B\,A\,C$ bekanntlich $^2/_3$ von dem umschliefsenden Rechteck, d. h. $F = {}^2/_3\,A\,D \cdot B\,C$. Macht man daher $B\,E = {}^4/_3\,A\,D$ und zieht $C\,E$, so ist auch $F = B\,C\,E$. (Die schraffirten Flächen müssen dann ebenfalls einander gleich sein.)

Fig. 11.

Sehr flache Kreisabschnitte kann man als Parabel-Abschnitte ansehen und nach vorstehendem Verfahren in Dreiecke verwandeln.

Das Verfahren bleibt auch gültig, wenn der Parabel-Abschnitt durch eine beliebig schief liegende Sehne begrenzt wird (Fig. 12). Legt man eine zur Sehne $B\,C$ parallele Berührungsgerade an die Parabel und zieht durch B und C Rechtwinklige zur Sehne, so ist die Parabelfläche wieder $^2/_3$ von dem Rechteck $B\,C\,G\,D$. Legt man aber $B\,D$ und $C\,G$ nicht rechtwinklig, sondern mit beliebiger Richtung einander parallel, so entsteht ein jenem Rechtecke flächengleiches Parallelogramm. Schneidet daher eine von B aus in beliebiger Richtung gezogene Gerade die zur Sehne parallele Berührungsgerade in J, so theile man $B\,J$ in 3 gleiche Stücke, trage ein solches Drittel noch über J hinaus nach E ab und ziehe $C\,E$, dann ist das Dreieck $B\,C\,E$ wiederum gleich dem Parabel-Abschnitte.

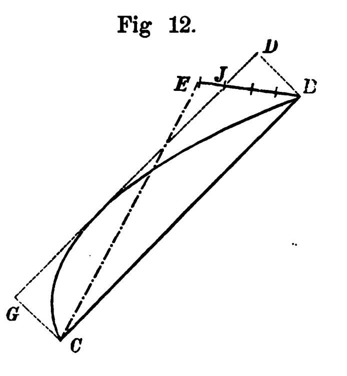


Fig 12.

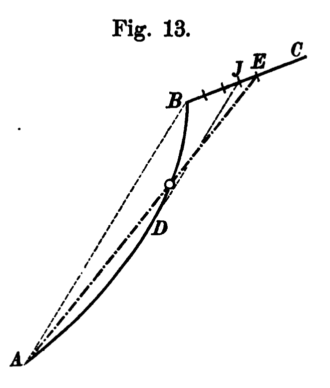
Dieses zeichnerische Verfahren findet häufig Anwendung, weil man sehr flache Kurven annähernd als Parabeln

behandeln, andere Kurven aber in so viel Theile zerlegen kann, dass jeder Theil für sich als eine Parabel angesehen werden darf.

Bei gleicher Sehnenlänge und gleicher Pfeilhöhe ist die Fläche eines Kreisabschnittes gröfser als die eines Parabel-Abschnittes. Bei 30° Centriwinkel oder einer Pfeilhöhe gleich etwa $^1/_{15}$ der Sehne beträgt der Unterschied etwa 0,6 %, bei 45° Centriwinkel oder etwa $^1/_{10}$ Pfeil etwa 0,8 %, bei 57° oder $^1/_8$ Pfeil etwa $1^1/_4$ %.

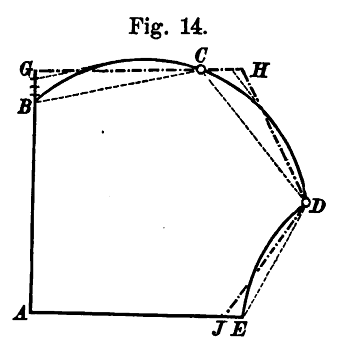
Schliefst sich an eine flache Kurve AB eine Gerade BC (Fig. 13) und soll die Kurve durch eine von A bis zu BC reichende Gerade AE ausgeglichen werden, so legt man an die Kurve eine zur Sehne parallele Berührungsgerade DJ, macht $BE = {}^4/_3\, BJ$ und zieht AE, so ist dies die Ausgleichungslinie.

Fig. 13.



Soll die theilweise krummlinig begrenzte Figur 14 in ein Vieleck verwandelt werden, so zerlegt man die Kurve in so viel Theile BC, CD und DE, dass jede einzelne als Parabel angesehen werden kann. Man zieht nun zunächst für BC von C aus eine Ausgleichungsgerade CG nach der Verlängerung von AB; dann folgt für CD von D aus eine Ausgleichungslinie DH nach der Verlängerung von CG, während schliefslich DJ die Kurve DE ausgleicht. Das Fünfeck $AGHDJ$ kann dann nach S. 7 leicht in ein Dreieck verwandelt werden.

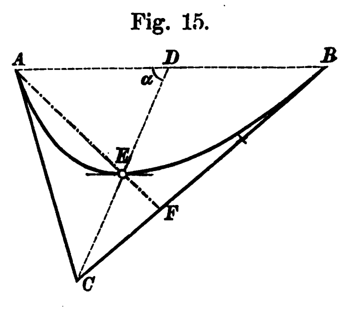
Fig. 14.



Das Parabel-Dreieck, d. h. die durch eine Parabel und die beiden einschliefsenden Tangenten begrenzte Fläche kann leicht auf ein geradlinig begrenztes Dreieck zurückgeführt werden. Ist C der Schnittpunkt der Tangenten (Fig. 15) und D die Mitte der Sehne AB, so sind CD und AB konjugirte Richtungen in Bezug auf die Parabel; CD wird in E von der Parabel halbirt, und eine bei E angelegte Tangente ist mit AB parallel. Die Parabelfläche $ADBEA$ hat

hiernach den Inhalt $^2/_3\, AB \cdot DE \cdot \sin\alpha = {}^1/_3\, AB \cdot CD \cdot \sin\alpha$, das äufsere Dreieck ABC aber den Inhalt $^1/_2\, AB \cdot CD \cdot \sin\alpha$; mithin ist die Fläche des Parabel-Dreiecks $AEBC = {}^1/_6\, AB \cdot CD \cdot \sin\alpha$, d. h. ein Drittel der Fläche des äufseren Dreiecks ABC. Macht man also $CF = {}^1/_3\, BC$, so ist das Dreieck ACF flächengleich mit dem Parabel-Dreieck $AEBC$. Beiläufig bemerkt, geht die Gerade AF durch den Punkt E. Die Parabel AEB wird bei dieser Flächen-Verwandlung nicht selbst benutzt, braucht daher auch nicht in scharfer Zeichnung gegeben zu sein, was für die Anwendung besonders wichtig ist; es genügt, die Endpunkte A und B, sowie den Schnittpunkt C der Tangenten genau zu kennen.

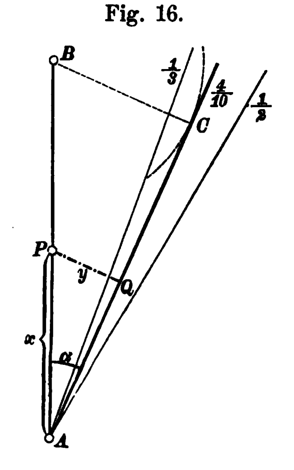
Fig. 15.



6. Verkleinerungs-Mafsstab.

Ein sehr einfacher und zweckmäfsiger Mafsstab zum Verkleinern einer Zeichnung oder zum verkleinerten Auftragen abzugreifender Längen besteht lediglich aus den Schenkeln eines Winkels, dessen Sinus gleich dem Verkleinerungs-Verhältnis (Fig. 16) ist. Ist dies Verhältnis z. B. $^4/_{10}$, so trage man $AB = 5^{\text{cm}}$ auf, schlage von B aus einen Kreis vom Halbmesser $= 2^{\text{cm}}$ und lege an diesen von A aus eine Berührende; dann ist $\sin BAC = 0{,}4$. Will man nun zu einer abgegriffenen Länge x das verkleinerte $y = 0{,}4\,x$ finden, so greife man $x = AP$ von A aus auf AB ab und messe nun, indem man den Zirkel bei A aushebt und um P dreht, den rechtwinkligen Abstand PQ des Punktes P von dem anderen Winkelschenkel, was bekanntlich ohne besondere Hülfsmittel schnell und scharf möglich ist; dann ist PQ die gewünschte Gröfse y. Dieser Mafsstab bedarf also nicht etwa einer Schaar von Parallelen, sondern zeigt nur die beiden Winkelschenkel. In Fig. 16 sind aufser AC für 0,4 noch zwei andere Winkelschenkel für $^1/_3$ und $^1/_2$ angebracht. Die Herstellung solches Mafsstabes erfordert nur 1 bis 2 Minuten, ist deshalb schon lohnend, wenn auch nicht sehr viele Längen zu verkleinern sind.

Fig. 16.



Zweiter Abschnitt.

Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene.

1. Vorbemerkung.

In der graphischen Statik werden die gegebenen Kräfte durch gerade Linien von bestimmter Richtung, Lage, bestimmter Länge und Pfeilrichtung (durch sog. Strecken) dargestellt, nach zeichnerischen Verfahren zu Mittelkräften vereinigt und auf etwaiges Gleichgewicht untersucht.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte weist eigentlich unmittelbar auf eine rein zeichnerische Behandlung der Mechanik hin, indem er die Darstellung zweier gegebenen Kräfte durch Strecken voraussetzt und sodann lehrt, wie man aus diesen durch Zeichnung eines Parallelogramms die Mittelkraft findet. Bei der weiteren Entwickelung der Mechanik hat man aber die rein geometrische Lösung in ein analytisches Gewand gekleidet, hat die bekannten Gleichgewichts-Bedingungen aufgestellt, welche von algebraischen Summen der Seitenkräfte in bestimmten Achsenrichtungen und von Momenten-Summen handeln, und ist erst später zu der eigentlich näher liegenden zeichnerischen Ausbildung der Kräftelehre zurückgekehrt. Man könnte daher fast sagen: „Die graphische Statik ist älter als die analytische Statik, in so fern das Parallelogramm-Gesetz eine rein geometrische Bedeutung hat.“

2. Zusammensetzung von Kräften mit gemeinsamem Schnittpunkte.

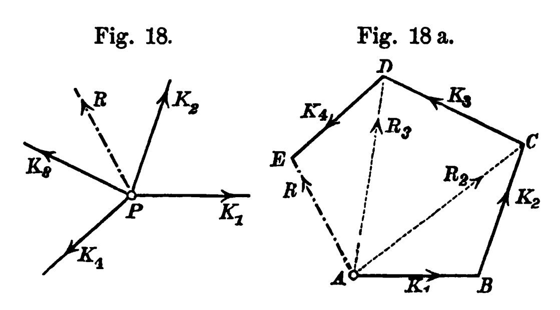
Haben die gegebenen (in einer Ebene liegenden) Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt P, so muss ihre Mittelkraft auch durch P hindurch gehen, braucht daher nur nach Gröfse, Richtung und Sinn (Pfeilrichtung) bestimmt zu werden.

Fig. 17.

Hat man zunächst nur mit 2 Kräften K_1 und K_2 zu thun (Fig. 17), so ist bekanntlich die Diagonale des aus ihnen gezeichneten Parallelogramms die Mittelkraft.

Zu ihrer Auffindung ist aber nicht das ganze Parallelogramm erforderlich; vielmehr genügt das Dreieck PMN, welches man erhält, indem man an den Endpunkt M der ersten Kraft K_1 die zweite Kraft K_2 (parallel verschoben) als Strecke MN derartig ansetzt, dass die Pfeilrichtung von M nach N weist, dass also die Pfeile in dem Streckenzuge PMN übereinstimmende Umfahrungsrichtung haben; die dritte Seite PN ist dann die Mittelkraft nach Gröfse und Richtung, und ihr Sinn ist vom Anfangspunkte P nach dem Endpunkte N des Streckenzuges zu verstehen. Fügt man eine Kraft $K_3 = -R_2$ hinzu, so hält sich diese mit R_2, also auch mit K_1 und K_2 im Gleichgewichte. K_1, K_2 und K_3 bilden dann ein Dreieck mit übereinstimmendem Umfahrungssinne.

Hat man nun mehrere durch P gehende Kräfte, z. B. K_1, K_2, K_3, K_4 (Fig. 18) zusammenzusetzen, so erfolgt die Ermittelung von R zweckmäfsig in einer besonderen Figur (Fig. 18 a). Man trägt von einem beliebigen Punkte A aus zunächst $K_1 = AB$ auf und setzt daran $K_2 = BC$, dann ist $AC = R_2$ die Mittelkraft beider.



Mit dieser, welche K_1 und K_2 nun vollständig vertritt, hat man sodann in gleicher Weise K_3 zu verbinden, indem man K_3 als Strecke CD an den Endpunkt C von R_2 setzt; dann ist AD die Mittelkraft R_3 von R_2 und K_3, also auch von K_1, K_2 und K_3. Schliefslich fügt man noch K_4 als Strecke DE hinzu und bekommt in AE die Mittelkraft der gegebenen Kräfte. Das Ziehen der Diagonalen AC und AD ist zur Auffindung des Punktes E offenbar entbehrlich. Man hat nur nöthig, die gegebenen Kräfte von A aus der Reihe nach so an einander zu tragen, dass sie einen Streckenzug $ABCDE$ mit übereinstimmender Umfahrungsrichtung bilden, dann ist die Schlussseite dieses Streckenzuges die gesuchte Mittelkraft nach Gröfse, Richtung und Sinn, u. zw. ist der letztere vom Anfangspunkte nach dem Endpunkte des Streckenzuges zu verstehen, ist

also dem Umfahrungssinne der gegebenen Kräfte entgegengesetzt. Dieses R hat man sich dann an den gegebenen Angriffspunkt P der Kräfte parallel verschoben zu denken. Der Streckenzug $ABCDE$ heifst das **Krafteck.**

Wie die Diagonale AD die Mittelkraft des durch sie abgeschlossenen Kräftezuges K_1, K_2, K_3 darstellt, so bedeutet auch irgend eine andere Diagonale des Kraftecks die Mittelkraft der durch sie abgetrennten Kräftegruppe; z. B. ist BE die Mittelkraft von K_2, K_3 und K_4.

Fällt der Endpunkt des Kräftezuges mit dem Anfangspunkte desselben zusammen, so wird die Mittelkraft offenbar Null. Also: Beliebig viele Kräfte mit gemeinsamem Schnittpunkte halten einander im Gleichgewichte, wenn sie, mit gleichem Umfahrungssinne an einander getragen, ein geschlossenes Krafteck bilden. Man überzeugt sich leicht, dass die Reihenfolge der Zusammensetzungen auf das Endergebnis keinen Einfluss hat, wie auch die Mechanik lehrt.

Vorstehende Entwickelungen bleiben auch gültig, wenn die Kräfte mit gemeinsamem Schnittpunkte P nicht in derselben Ebene liegen; es wird dann nur das Krafteck zu einer Figur im Raume. In Figur 18a liegt dann das Dreieck ABC in der Ebene der Kräfte K_1 und K_2. Tritt nun K_3 aus dieser Ebene heraus, so lässt sich diese Kraft gleichwohl in derselben Weise mit R_2 vereinigen, jedoch liegt dann das Dreieck ACD in der Ebene der R_2 und K_3, d. h. das Krafteck erfährt längs der Diagonalen AC einen Knick. Ebenso kann nach jeder ferneren, vom Anfangspunkte A aus gezogenen Diagonalen eine Knickung erfolgen, aber immerhin wird die Schlussseite des Kraftecks auch in diesem Falle die Mittelkraft der Kräftegruppe bedeuten. Nur muss man in solchem Falle behufs der richtigen Darstellung und Ermittelung der Kräfte in 2 Projektionen zeichnen und die Lehren der Darstellenden Geometrie benutzen.

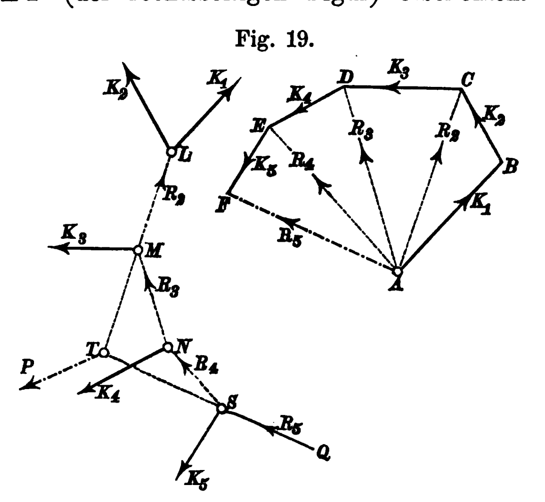
3. Zusammensetzung beliebiger Kräfte in einer Ebene.

Haben die gegebenen Kräfte keinen gemeinsamen Schnittpunkt, denkt man sich dieselben aber an einen beliebig gewählten gemeinsamen Punkt parallel verschoben, so ändert sich dadurch nur die Lage der Mittelkraft, während Gröfse, Richtung und Sinn

unverändert bleiben, also nach dem vorstehend erläuterten Verfahren mittels des Kraftecks gefunden werden können. Es empfiehlt sich daher, die gegebenen Kräfte zu einem Krafteck zu vereinigen, um Gröfse, Richtung und Sinn der Kräfte und Mittelkräfte darzustellen, daneben aber in der Figur der gegebenen Richtungslinien der Kräfte nur die Lage der Mittelkraft zu bestimmen.

In Fig. 19 sind links die Richtungslinien der Kräfte K_1 bis K_5 dargestellt; auf diesen die Kraftgröfsen durch bestimmte Längen anzugeben, hat keinen Zweck, weil die Kraftgröfsen im Krafteck $ABCDEF$ (der rechtsseitigen Figur) erscheinen. Die Lage der Mittelkraft ergiebt sich nun in folgender Weise: Ist L der Schnittpunkt der Richtungslinien von K_1 und K_2, so muss durch diesen auch die Mittelkraft R_2 von K_1 und K_2 hindurchgehen. Ihre Richtung ist durch die Diagonale AC des Kraftecks bestimmt; zieht man also eine Parallele zu dieser durch L, so hat man

Fig. 19.



damit die Lage von R_2. Der Punkt M, in welchem R_2 die Richtungslinie von K_3 schneidet, muss nun auch ein Punkt der Mittelkraft R_3 von R_2 und K_3 (also auch von K_1, K_2 und K_3) sein; zieht man daher $MN \parallel AD$ im Krafteck, so ist MN die wahre Richtungslinie von R_3. In derselben Weise legt man durch N eine Parallele zu AE bis zum Schnittpunkte S mit der nächsten Kraft K_5 und durch S endlich $SQ \parallel AF$, so ist QS die Richtungslinie R der gegebenen 5 Kräfte.

Der Linienzug $LMNSQ$ heifst das Seileck (Seilpolygon) der gegebenen Kräfte, weil er nach den Lehren der Mechanik die Gleichgewichtsform eines bei Q befestigten biegsamen Seiles darstellt, an welchem die Kräfte K_1 bis K_5 in den Knoten-

punkten L, M, N und P angreifen. Die im Krafteck gefundenen Kräfte R_2, R_3 und R_4 und R_5 würden die Spannkräfte der entsprechenden (d. h. parallelen) Seilstücke bedeuten.

Kehrt man den Sinn der Kräfte K_1, K_2, K_3 usw. um, so ergiebt sich derselbe Linienzug $LMNSQ$ zur Bestimmung der Lage der Mittelkräfte R_2, R_3, R_4 und R_5. Jener Linienzug kann aber jetzt nicht mehr als Gleichgewichtsform eines Seiles bezeichnet werden, weil die Seilkräfte nun Druckkräfte sein würden. Dagegen könnte man sich unter $LMNSQ$ eine Stangenverbindung mit reibungslosen Gelenken vorstellen, welche durch die Kräfte K im Gleichgewichte gehalten wird und deren Stangen dabei Druckspannungen erfahren. Es würde daher die Bezeichnung des fraglichen Linienzuges als Gelenkvieleck zutreffender sein, doch hat sich der Name Seileck für positive und negative Seilkräfte allgemein eingebürgert.

Die Mittelkraft R_5 von der Gröfse AF und der Lage PQ ist den Kräften K_1 bis K_5 gleichwerthig; umgekehrt angebracht, muss sie also mit K_1 bis K_5 im Gleichgewichte sein.

Wir wiederholen, dass in der Seileckfigur keine Kraftgröfsen enthalten sind, sondern nur Richtungslinien von Kräften; die Gröfse der Kräfte findet man im Krafteck.

4. Mittelkraft mehrerer auf einander folgenden Kräfte.

Ist $LMNSQ$ (Fig. 19) ein zu den Kräften K_1 bis K_5 gezeichnetes Seileck (welches man sich durch Hinzufügung weiterer Kräfte noch beliebig fortgesetzt denken kann), so bedeutet irgend eine der Seiten die Richtungslinie der Mittelkraft aller vorausgehenden Kräfte und ist diesen gleichwerthig. So ist z. B. R_2 (in LM liegend) mit K_1 und K_2 gleichwerthig, was mit Hülfe des Gleichwerthigkeits-Zeichens $\equiv$ geschrieben werden kann: $R_2 \equiv K_1, K_2$. Ebenso ist irgend eine andere Mittelkraft, z. B. R_5 (in SQ liegend) mit K_1 bis K_5 gleichwerthig, d. h.

$$R_5 \equiv K_1, K_2, K_3, K_4, K_5.$$

Ersetzt man auf der rechten Seite K_1 und K_2 durch R_2, so entsteht

$$R_5 \equiv R_2, K_3, K_4, K_5.$$

K_3, K_4 und K_5 sind 3 im Kraft- und Seileck auf einander folgende Kräfte, die zwischen den Seiten LM und SQ liegen;

bezeichnet man deren Mittelkraft (die im entsprechenden Krafteck leicht nach Gröfse und Richtung zu finden wäre) mit P und ersetzt sie durch diese, so wird $R_5 \equiv R_2, P$. Wenn aber eine Kraft R_5 die Mittelkraft zweier anderen R_2 und P ist, so müssen alle drei einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, und weil der Schnittpunkt T von R_2 und R_5, d. h. der Schnittpnnkt der Seiten LM und SQ gegeben ist, so muss auch die Mittelkraft P durch diesen Punkt T gehen; oder: Die Mittelkraft mehrerer im Seileck auf einander folgenden Kräfte geht durch den Schnittpunkt der diese Kräfte einschliefsenden Seiten.

Die erste Kraft K_1 im Seileck kann man sich auch schon als Mittelkraft etwaiger vorausgehender Kräfte denken; es kann daher dis Richtungslinie der ersten Kraft auch schon als eine Seite des Seilecks im Sinne des obigen Satzes aufgefasst werden. Die Mittelkraft von K_2 und K_3 muss hiernach durch den Schnittpunkt von K_1 mit MN gehen.

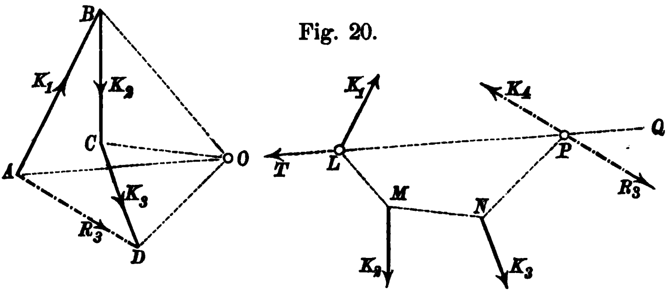
Denkt man sich sämmtliche Seileckseiten gehörig verlängert, so hat jeder der entstehenden Schnittpunkte die Bedeutung des Angriffspunktes einer Mittelkraft. Da in manchen Fällen nicht vorher zu übersehen ist, welche dieser Punkte man etwa gebraucht, so empfiehlt es sich, die Seileckseiten beim ersten Auftragen mit Blei über die einschliefsenden Kräfte hinaus durchzuziehen, da ein nachheriges Verlängern besonderen Zeitaufwand beansprucht.

Hiernach kann man mittels des Seilecks nicht nur die Lage der Mittelkraft aller Kräfte von der ersten (K_1) bis zu einer bestimmten (K_n) finden, sondern auch die Lage der Mittelkraft jeder beliebigen Zwischengruppe (z. B. K_2 bis K_n oder K_3 bis K_n usf.).

Dies ist von besonderer Wichtigkeit, wenn die Kräfte so liegen, dass ihre Schnittpunkte für die Zeichnung nicht bequem oder überhaupt nicht benutzbar sind. In solchem Falle würde das auf S. 11 beschriebene Verfahren zur Zeichnung eines Seilecks, welches in dem Schnittpunkte L zweier Kräfte beginnt, nicht anwendbar sein. Diese Schwierigkeit kann man nun aber umgehen, indem man der gegebenen Kräftegruppe K_1 bis K_n irgend eine beliebig gewählte Kraft T, welche K_1 in einem passenden Punkte L schneidet, vorausgehen lässt.

Sind also K_1, K_2, K_3 gegeben (Fig. 20), welche das Krafteck $ABCD$ mit AD als Mittelkraft liefern, so wählt man, weil ein bequemer Schnittpunkt irgend zweier der gegebenen Kräfte nicht vorliegt, auf K_1 einen Punkt L und legt durch diesen eine Kraft T

Fig. 20.



von beliebiger Gröfse und Richtung, im Krafteck durch OA dargestellt. Es ist nun O der Anfangspunkt des gesammten Kräftezuges; die Mittelkraft von T und K_1 wird durch die Strecke OB dargestellt und muss durch L hindurch gehen, LM parallel OB ist demnach die auf T und K_1 folgende Seileckseite. Ebenso zieht man $MN \parallel OC$, $NP \parallel OD$. Die Mittelkraft R_3 von K_1, K_2 und K_3 muss nun nach S. 13 durch den Schnittpunkt der diese Kräfte einschliefsenden Seiten des Seilecks gehen, wobei die erste Kraft T als die der Kräftegruppe vorausgehende Seite zu betrachten ist, während NP auf die Gruppe folgt. Die Richtung von T schneidet NP in P, so dass R_3 durch P gelegt werden muss, u. zw. parallel mit AD.

Der Punkt O heifst der Pol, die von ihm ausgehenden Geraden nach den Endpunkten der gegebenen Kräfte heifsen Polstrahlen.

Soll eine Kraft K_4 den gegebenen Kräften K_1, K_2, K_3 das Gleichgewicht halten, so muss sie das Entgegengesetzte von R_3 sein und in die Richtungslinie von R_3 fallen, d. h. durch den Punkt P gehen. Im Krafteck würde K_4 durch die Strecke DA dargestellt werden, das Krafteck $ABCDA$ also geschlossen sein. Im Seileck würde die auf K_4 folgende Seite durch P gehen und parallel mit dem auf die Strecke DA im Krafteck folgenden Polstrahle OA sein müssen; d. h. die auf K_4 folgende Seileckseite PQ fällt in die Richtung von T, oder die beiden Seiten, welche die Kräftegruppe K_1 bis K_4 einschliefsen, fallen zusammen. Es folgt also der Satz: Mehrere im Seileck auf

einander folgende Kräfte (deren erster schon eine Seileckseite vorausgeht) sind im Gleichgewichte, wenn sie im Krafteck einen geschlossenen Streckenzug bilden, und wenn im Seileck die diese Kräfte einschließenden Seiten in eine einzige Gerade, die sog. Schlusslinie zusammenfallen, wenn also das Seileck der betreffenden Kräfte ebenfalls geschlossen ist.

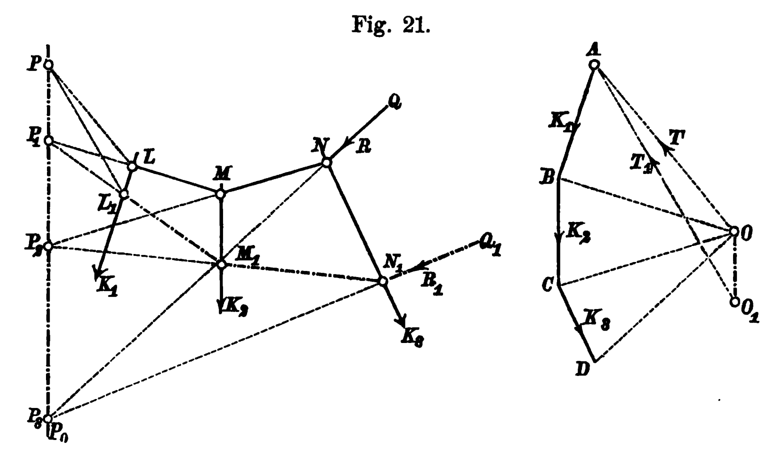
Würde nur das Krafteck, nicht aber das Seileck geschlossen sein, würde also die auf K_4 folgende Seileckseite vielleicht oberhalb T, d. h. oberhalb LP liegen, so würde K_4 rechts von P vorbeigehen. Es bedeutet dies, dass die Kräfte K_1 bis K_4 sich zu einem Kräftepaare zusammensetzen lassen; denn die Mittelkraft R_3 von K_1, K_2 und K_3 geht durch P, die gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Parallelkraft K_4 geht aber an R_3 rechts vorbei und bildet mit ihr ein links herum drehendes Kräftepaar. Die erste Bedingung, dass das Krafteck geschlossen sein muss, ist gleichwerthig mit den beiden Gleichungen der analytischen Statik $\Sigma K \cos\alpha = 0$ und $\Sigma K \sin\alpha = 0$; die letzte Bedingung aber über den Schluss des Seilecks entspricht der Momenten-Gleichung $\Sigma K l = 0$.

5. Einfluss einer Verschiebung des Poles; Polarachse.

Der Pol O des Kraftecks kann ganz beliebig nach Rücksichten der Zweckmäßigkeit gewählt werden; seine Lage hat auf das Ergebnis der Zusammensetzung der Kräfte keinen Einfluss.

Zeichnet man nun zu einer Kräftegruppe K_1, K_2, K_3 (Fig. 21)

Fig. 21.



mit einem Pole O ein in dem beliebigen Punkte L beginnendes Seileck $LMNQ$ und zu denselben Kräften K mit einem anderen

Pole O_1 und einem anderen Anfangspunkte L_1 ein zweites Seileck, so stehen diese in einer bestimmten Beziehung zu einander, welche gestattet, das zweite Seileck unmittelbar aus dem ersten abzuleiten.

Irgend eine Seite des ersten Seilecks, z. B. die letzte, NQ, ist nämlich die Richtungslinie der Mittelkraft R aus der beliebigen Kraft $T = OA$ und den gegebenen K_1, K_2, K_3; oder es ist:

$$R \equiv T,\ K_1,\ K_2,\ K_3.$$

Für die entsprechende Seite des zweiten Seilecks, also $N_1 Q_1$, gilt ebenso

$$R_1 \equiv T_1,\ K_1,\ K_2,\ K_3.$$

Fügt man auf der rechten Seite dieser Gleichung T und $-T$ (das Entgegengesetzte von T) hinzu, so wird $R_1 \equiv T_1,\ K_1,\ K_2,\ K_3,\ T,\ (-T)$, wobei auf die Reihenfolge der Kräfte nichts ankommt. Wenn man dann T, K_1, K_2, K_3 durch R ersetzt, so wird $R_1 \equiv T_1,\ (-T),\ R$, und fügt man noch T_1 und $-T$ zu der Mittelkraft P zusammen, so ist $R_1 \equiv P,\ R$, oder R_1 und R müssten sich mit P in einem Punkte schneiden. Die Kraft T_1 ist im Krafteck durch $O_1 A$, das Entgegengesetzte von T aber durch $A O$, die Mittelkraft P von beiden also durch $O O_1$ dargestellt. Hiermit steht die Richtung von P fest. Im Seileck sind die Lagen von T und T_1 die der Kraft K_1 vorausgehenden Seiten; es geht T durch L, T_1 durch L_1. Verlängert man diese beiden Seiten bis zu ihrem Schnittpunkte P und zieht durch P eine Parallele zu $O O_1$, so ist damit die Richtungslinie $P P_0$ der Kraft P gefunden. Auf dieser Linie $P P_0$ müssen sich also R und R_1 und ebenso je 2 entsprechende Seiten der beiden Seilecke schneiden.

Die Gerade PP_0 heifst die Polarachse der beiden Seilecke; man findet sie, indem man durch den Schnittpunkt der ersten Seiten der beiden Seilecke eine Parallele zu der Verbindungsgeraden der beiden Pole O und O_1 legt. Je 2 entsprechende Seiten der beiden Seilecke schneiden sich auf der Polarachse.

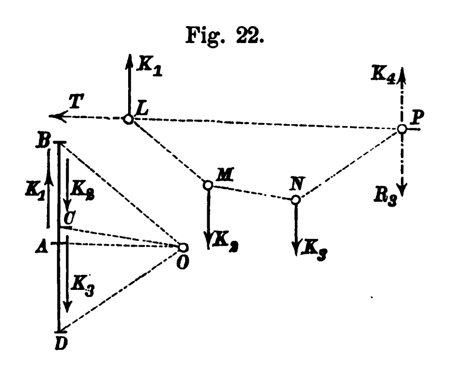
Hat man die Polarachse $P P_0$ gefunden, so lässt sich das zweite Seileck ohne weitere Benutzung des Kraftecks (d. h. ohne

Ziehung von Parallelen) aus dem ersten Seileck ableiten: Man verlängert LM bis zum Schnitte P_1 mit der Polarachse, so ist $P_1 L_1 M_1$ eine Seite des zweiten Seilecks; man verlängert ebenso MN bis P_2 und erhält in $P_2 M_1 N_1$ eine neue Seite, usf.

6. Zusammensetzung von Parallelkräften in einer Ebene.

Zu parallelen Kräften K_1, K_2, K_3 kann man mit Benutzung eines beliebigen Poles O in derselben Weise Krafteck und Seileck zeichnen, wie auf S. 14 (Fig. 20) für solche Kräfte gezeigt wurde, deren Schnittpunkte nicht bequem benutzbar sind. Das Krafteck wird nur dadurch etwas weniger übersichtlich, dass der Kräftezug in eine einzige Gerade fällt, so dass man Kräfte entgegengesetzten Sinnes durch geeignete Bezeichnung deutlich von einander unterscheiden muss. In Fig. 22 seien K_1 aufwärts, K_2 und K_3 abwärts gerichtet und im Krafteck bezw. durch AB, BC, CD dargestellt. Man wählt einen beliebigen Pol O (vielleicht der Mitte von BD gegenüber), zieht den Polstrahl OA und dazu parallel die Kraftrichtung T (als erste, der Kraft K_1 vorausgehende Seileckseite) durch einen beliebigen Punkt L der Richtungslinie von K_1, dann den Polstrahl OB und dazu parallel LM, ebenso MN und NP parallel den Polstrahlen OC und OD. Durch den Punkt P, in welchem die die Kräftegruppe K_1 bis K_3 einschliefsenden Seiten sich schneiden, geht nun die Mittelkraft R_3 dieser Gruppe, deren Gröfse, Richtung und Sinn in der Schlussseite AD des Kraftecks gegeben ist.

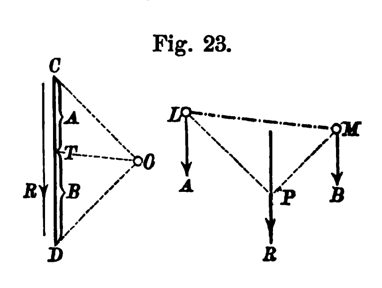
Fig. 22.



Legt man durch P eine Kraft K_4, welche genau das Entgegengesetzte von R_3 ist, so hält diese den Kräften K_1 bis K_3 das Gleichgewicht, und LP ist dann die Schlusslinie des Seilecks dieser Kräfte K_1 bis K_4.

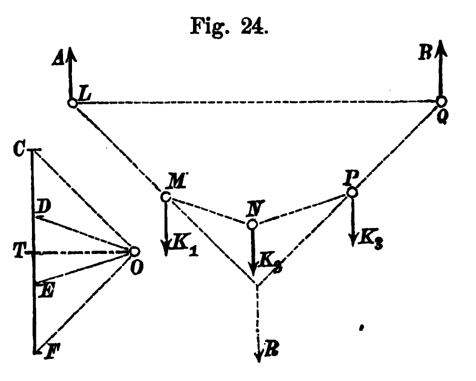
Zerlegung einer Kraft R in zwei Parallelkräfte. Die gegebene Kraft R soll in zwei der Lage nach gegebene Parallelkräfte A und B zerlegt werden (Fig. 23). Man trage zu dem Ende $R = CD$ auf, bilde mit einem beliebig gewählten Pole O ein Krafteck OCD und ziehe durch einen beliebigen Punkt P der Richtungslinie von R Parallelen zu den Strahlen OC und OD, welche A und B in L und M schneiden. Verbindet man dann L und M durch eine Gerade, so ist diese die mittlere Seite eines Seilecks für A und B, während LP und MP die auf der Richtungslinie der Mittelkraft R sich schneidenden Verlängerungen der ersten und letzten Seite darstellen. Zu LM parallel muss daher der mittlere Strahl OT im Krafteck gezogen werden, welcher nunmehr R in die Stücke $CT = A$ und $TD = B$ zerlegt. Mit umgekehrten Pfeilrichtungen (aufwärts) genommen, würden A und B mit R im Gleichgewichte sein.

Fig. 23.



Sind statt einer Kraft R mehrere gleichgerichtete Parallelkräfte K_1, K_2, K_3 gegeben, denen durch zwei nach Richtung und Lage gegebene Parallelkräfte A und B das Gleichgewicht gehalten werden soll, so setze man K_1, K_2, K_3 erst zu ihrer Mittelkraft R zusammen und verfahre mit dieser, wie vorstehend erläutert. Man zeichnet (Fig. 24) aus $K_1 = CD$, $K_2 = DE$, $K_3 = EF$ mit einem beliebigen Pole O ein Krafteck und dazu ein Seileck, dessen erste, mit CO parallele Seite der Kraft K_1 vorausgeht. Durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Seite geht dann R. Schneidet aber die erste Seite die Richtungslinie von A in dem Punkt L, die letzte Seite die Richtung von B in Q, so ziehe man LQ, welche der Linie LM in Fig. 23 entspricht. Mit LQ parallel muss der Theilstrahl OT gezogen werden,

Fig. 24.

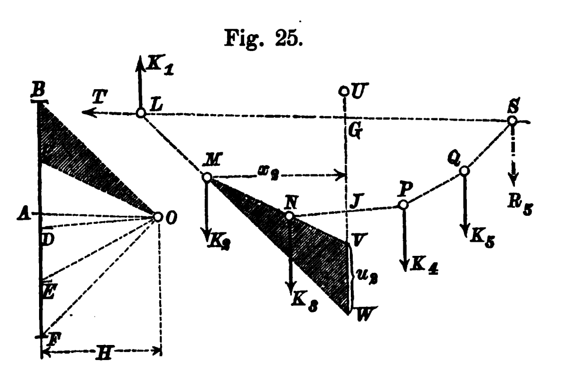


welcher die Summe der Kräfte K, nämlich CF im Kraftеck, in die beiden Theile $CT = A$ und $TF = B$ scheidet. Offenbar ist aber die Mittelkraft R, welche zur Herleitung diente, bei der Ausführung des Verfahrens überflüssig: Man zeichnet einfach ein Seileck der gegebenen Kräfte K; die Schnittpunkte der äufsersten Seiten mit den Richtungslinien von A und B bestimmen die Schlusslinie LQ, mit welcher der Theilstrahl parallel ist.

Mit einem anderen Pole wäre ein anderes Kraft- und Seileck entstanden, doch würde die Lage des Theilpunktes T dadurch nicht geändert werden, weil diese nur von den gegebenen Kräften K und den Richtungslinien der Kräfte A und B abhängt.

Momentensumme von Parallelkräften. Zu den Kräften (Fig. 25) $K_1 = AB$, $K_2 = BC$, $K_3 = CD$ usf. (im Krafteck) sei mit beliebigem Pole O ein Seileck gezeichnet. In Bezug auf einen beliebigen Drehpunkt U hat eine der Kräfte, z. B. K_2 das Moment $-K_2 x_2$. Für den absoluten Werth $K_2 x_2$ kann man einen zur Zusammensetzung der Momente geeigneteren Ausdruck finden. Der Kraft $K_2 = BC$ und dem Pole O entspricht ein Dreieck BCO im Krafteck; zieht man aber durch den Drehpunkt U eine Parallele zu den Kräften K und verlängert die die Kraft K_2 einschliefsenden Seileckseiten, welche zu den Polstrahlen OB und OC parallel sind, bis zu den Schnittpunkten W und V mit der durch U gezogenen Geraden, so entsteht ein Dreieck WVM, welches mit BCO ähnlich ist. In den beiden Dreiecken sind die Grundlinien und Höhen verhältnisgleich. Der rechtwinklige Abstand des Poles O von den Kräften K im Krafteck werde der Polabstand genannt und mit H bezeichnet. Betrachtet man nun $BC = K_2$ als Grundlinie und H als Höhe des einen Dreiecks, $VW = u_2$ als Grundlinie und x_2 als Höhe des anderen, so ist $K_2 : H = u_2 : x_2$ oder $K_2 x_2 = H u_2$. Der Abschnitt u_2, welcher durch die beiden die Kraft K_2 einschliefsenden Seileck-

Fig. 25.



seiten auf der durch U gelegten Geraden gebildet wird, giebt also, mit dem Polabstande H multiplicirt, den absoluten Werth des Momentes von K_2 in Bezug auf U.

Für die verschiedenen Kräfte im Seileck ist nun H eine und dieselbe Gröſse, nur die Abschnitte u auf der Geraden durch U sind verschieden; die Momentensumme mehrerer Kräfte wird daher in der Form $H \Sigma u$ erscheinen, so dass es nur auf eine algebraische Summirung der Abschnitte u ankommt, u. zw. legen sich diese u-Werthe für einander folgende Kräfte in der Figur schon derartig an einander, dass man Σu ohne Weiteres abgreifen kann. Für die Kraft K_1 sind die Schlusslinie LS und die Gerade LMW die einschlieſsenden Seiten, so dass, wegen der Drehungsrichtung rechts herum, $+H \cdot WG$ das Moment von K_1 ist. Die Momentensumme von K_1 und K_2 wird $H\,(WG - u_2) = H \cdot VG$. Das Moment von K_3 ist $H \cdot VJ$, die Momentensumme von K_1, K_2 und K_3 mithin $H \cdot JG$, während diejenige von K_2 und K_3 allein $-H \cdot WJ$ sein würde. Es ist aber JG der Abschnitt der die 3 Kräfte K_1, K_2 und K_3 einschlieſsenden Seileckscheiben auf der Geraden durch U, ebenso WJ der Abschnitt der die beiden Kräfte K_1 und K_2 einschlieſsenden Seiten auf derselben Geraden durch U. Daher folgt der Satz:

Die Momentensumme von mehreren im Seileck aufeinander folgenden Parallelkräften in Bezug auf einen Punkt U ist gleich dem Polabstande H im Kraftecke mal dem Abschnitte u, welcher von den die Kräftegruppe einschlieſsenden Seileckseiten auf der durch den Momentenpunkt U parallel zu den Kräften gezogenen Geraden gebildet wird.

Das Vorzeichen der Momentensumme erkennt man aus der Lage und dem Sinne der Mittelkraft. K_2 und K_3 liefern eine links von U liegende, nach unten gerichtete Mittelkraft, welche also links herum dreht. Die Mittelkraft aber von K_1, K_2 und K_3 geht durch den Schnittpunkt der einschlieſsenden Seiten LS und NP, welcher rechts von U liegt; ihre Gröſse ist im Krafteck durch AD mit dem Sinne nach unten gegeben; ihr Drehsinn ist folglich rechts herum.

Denkt man sich die Seileckseiten als reibungslose Gelenkstangen, so werden in ihnen durch die Kräfte T, K_1, K_2 usf. Spannkräfte erzeugt, deren Gröſsen durch die Polstrahlen des Kraftecks bestimmt sind. Zerlegt

man diese Spannkräfte nach der Richtung von K und rechtwinklig dazu, so sind die letzteren Seitenkräfte von der übereinstimmenden Gröfse $H =$ dem Polabstande. Sind die Kräfte K lothrecht, so ist H die in der Gelenkverbindung herrschende wagerechte Seitenkraft.

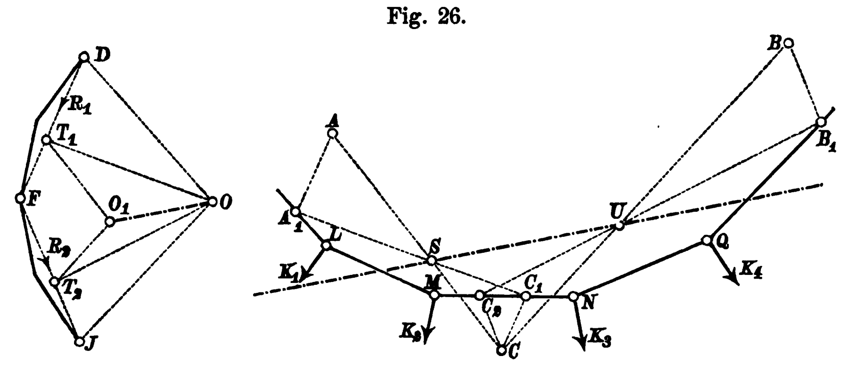
7. Zeichnung eines Seilecks durch drei gegebene Punkte.

Die Wahl des Poles O ist im Allgemeinen willkürlich; bei gegebener Kräftegruppe entspricht jedem anderen Pole auch ein anderes Seileck. Die Lage des Poles kann durch 2 Koordinaten, oder durch irgend 2 Polstrahlen bestimmt werden. Mit der freien Wahl des Poles hat man also freie Verfügung über 2 Bestimmungsstücke, welche die Form des Seilecks bedingen. Da aber auch die Lage der ersten Seite des Seilecks noch frei wählbar ist, so ergiebt sich ein für gegebene Kräfte zu zeichnendes Seileck als in 3 Beziehungen unbestimmt oder (wie die Drucklinie eines Gewölbes) dreifach statisch unbestimmt.

Die 3 Bedingungen für die Form und Lage eines Seilecks können nun auch in der Weise zum Ausdrucke kommen, dass man für irgend 3 Seiten je einen Punkt festsetzt, durch den die betreffende Seite gehen soll. Es kommt darauf an, die entsprechende Lage des Poles zu finden.

Zu den Kräften K_1 bis K_4 (Fig. 26) sei zunächst mit beliebigem Pole O und willkürlicher Lage der Anfangsseite ein Seileck $LMNQ$

Fig. 26.



gezeichnet; man soll es derartig abändern, dass die erste, dritte und fünfte Seite bezw. durch die Punkte A, C und B gehen. Von den verschiedenen Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe möge hier das von Hüppner im Civilingenieur 1887, S. 89 angegebene mitgetheilt werden. Die erste und dritte Seite, deren

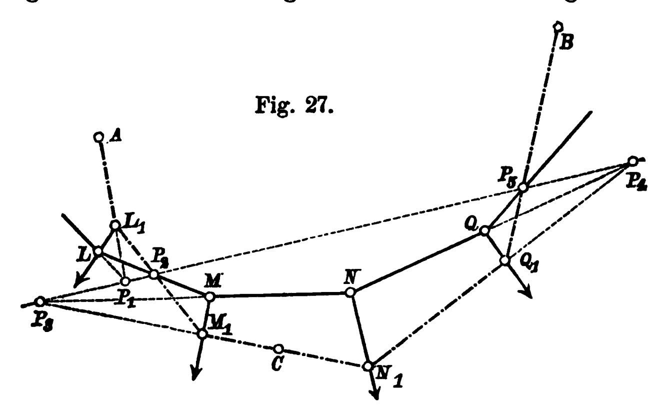
endgültige Lage durch die bestimmten Punkte A und C bedingt ist, schliefsen die Kräfte K_1 und K_2 ein; diese lassen sich durch eine Mittelkraft R_1 ersetzen, welche im Kraftecke durch DF dargestellt wird. Ebenso führen die übrigen Kräfte auf die Mittelkraft $R_2 = FJ$. Man ziehe nun durch die gegebenen Punkte A und C Parallelen zu R_1 (d. h. zu DF) und bezeichne deren Schnittpunkte mit der ersten bezw. dritten Seileckseite durch A_1 und C_1. Zieht man dann die Gerade $A_1 C_1$, so ist diese die Schlusslinie eines Seilecks, mittels dessen die Mittelkraft R_1 in zwei parallele, durch A_1 und C_1, also auch durch A und C gehende parallele Seitenkräfte zerlegt wird. Der zu $A_1 C_1$ parallel gezogene Strahl ist der Theilstrahl und liefert den Theilpunkt T_1 der Kraft R_1. In gleicher Weise zieht man durch C und B Parallelen zu R_2, welche die dritte und fünfte Seileckseite in C_2 und B_1 schneiden. $C_2 B_1$ ist dann wieder eine Schlusslinie und $O T_2$ der zugehörige Theilstrahl. Die Mittelkräfte R_1 und R_2, sowie deren Zerlegung in Seitenkräfte durch bestimmte Punkte A und C bezw. C und B sind aber von der Wahl des Poles O unabhängig, so dass jeder andere Pol, also auch der gesuchte O_1 auf dieselben Theilpunkte T_1 und T_2 führen muss. Für das gesuchte Seileck durch A und C würde nun eine Schlusslinie AC an die Stelle von $A_1 C_1$ (in dem vorläufigen Seileck) treten; der neue Theilstrahl wird daher durch T_1 gehen und mit AC parallel sein müssen; man ziehe also durch T_1 eine Parallele zu AC. Ebenso verbinde man B mit C und ziehe dazu eine Parallele durch T_2. Der Schnittpunkt O_1 dieser beiden neuen Theilstrahlen $T_1 O_1$ und $T_2 O_2$ ist dann der gesuchte Pol zu dem Seileck durch A, C und B.

Je zwei entsprechende Seiten des vorläufigen und des endgültigen Seilecks schneiden sich (nach S. 15) auf einer Polarachse; die Schlusslinien $A_1 C_1$ und $C_2 B_1$ des ersten, sowie die entsprechenden AC und CB des zweiten Seilecks haben aber auch die Bedeutung von Seileckseiten. Hiernach muss die Polarachse durch die Schnittpunkte S und U der Schlusslinien gehen, muss aber zugleich parallel mit der Verbindungsgeraden $O O_1$ der beiden Pole sein, wodurch eine Prüfung der Richtigkeit der Zeichnung gegeben ist.

Die Schnittpunkte der Seiten des vorläufigen Seilecks mit der Polarachse liefern in Verbindung mit den gegebenen Punkten

A, C und B meistens genügende Anhaltspunkte für das endgültige Seileck; sollten aber die Schnittpunkte nicht in genügender Zahl benutzbar sein, so bestimmt der neue Pol O_1 die gesuchte Richtung der Seiten. In Fig. 27 ist die Zeichnung des zweiten

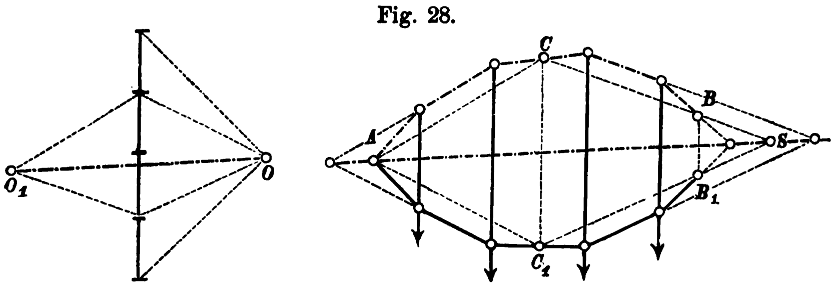
Fig. 27.



Seilecks ausgeführt: Von den fünf Seiten des ersten Seilecks liefern vier die leicht zugänglichen Schnittpunkte P_1, P_2, P_4, P_5 mit der Polarachse. Die erste Seite $A L_1$ des zweiten Seilecks ist durch die Punkte A und P_1 festgelegt, die zweite $L_1 M_1$ durch L_1 und P_2, die dritte durch M_1 und C, die vierte durch N_1 und P_4, die letzte durch P_5 und B, wobei Q_1 noch zur Prüfung dient.

Die Figur wird übersichtlicher, wenn man das erste Seileck so zeichnet, dass die erhabene (konvexe) Seite entgegengesetzt gerichtet ist zu der des gesuchten Seilecks. Sind z. B. die gegebenen Kräfte parallel und von gleichem Sinne (etwa lothrecht abwärts) und soll ein durch die Punkte A, C und B (Fig. 28)

Fig. 28.



gehendes Seileck gesucht werden, so wähle man den Pol O zunächst rechts von der Kraftlinie und kann die erste Seileck-

seite schon durch A legen. Nach Vollendung dieses Seilecks ziehe man durch C und B Lothrechte, welche das Seileck in C_1 und B_1 schneiden. Dann sind AC und AC_1 zwei einander entsprechende Schlusslinien mit dem gemeinsamen Punkte A, ebenso CB und C_1B_1 mit dem Schnittpunkte S. Hiernach wird AS die Polarachse. Der endgültige Pol wird in gleicher Weise gefunden wie vorher. Aufser A, C und B dienen noch 3 Punkte auf der Polarachse zur Festlegung des gesuchten Seilecks.

Dritter Abschnitt.

Schwerpunkte, Trägheitsmomente und Centrifugalmomente ebener Flächen.

---

1. Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche.

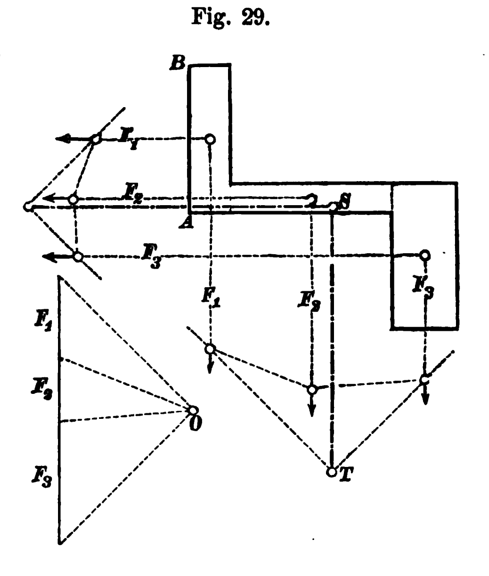
Man zerlegt die gegebene Fläche in Theile, deren Inhalte und Schwerpunkte man leicht bestimmen kann, legt durch die einzelnen Schwerpunkte gleichgerichtete, etwa lothrechte Kräfte, deren Gröfsen den einzelnen Flächentheilen entsprechen und sucht deren Mittelkraft, so liegt auf deren Richtungslinie der gesuchte Schwerpunkt. Sodann bringt man die Einzelkräfte durch Drehung um die Theilschwerpunkte in eine beliebige andere, aber allen gemeinsame Richtung (etwa wagerecht) und wiederholt das vorher angewandte Verfahren; dann ergiebt sich eine zweite, den Schwerpunkt enthaltende Gerade und damit der Schwerpunkt selbst.

Die Kräfte, welche die Theilflächen im Kraftecke darstellen, können zu diesen Flächen in einem beliebigen Verhältnisse stehen; man verwandele daher die einzelnen Figuren in Rechtecke (oder Dreiecke) von beliebiger, aber gleicher, Grundlinie und trage die Höhen auf.

In Fig. 29 findet man den Schwerpunkt der 3 einzelnen Rechtecke im Schnittpunkte der Diagonalen. Als gemeinsame Grundlinie d wähle man vielleicht die linksseitige Kante AB, bestimme die entsprechenden Höhen nach S. 2 und trage diese als F_1, F_2, F_3 zu einem Krafteck an einander. Der Pol O kann beliebig gewählt werden; räthlich ist es aber, die äufsersten Strahlen mit solchen Neigungen gegen die Wagerechte zu zeichnen, wie sie das Zeichendreieck darbietet, also etwa unter 45^0; dann

hat man die Neigung der beiden entsprechenden Seileckseiten unmittelbar, ohne dass man sie aus dem Kraftecke zu entnehmen braucht. Nach diesem Kraftecke zeichnet man also das Seileck; der Schnittpunkt T der äufsersten Seiten (die man sogleich beim Auftragen in genügender Länge ziehen muss) ist dann ein Punkt der Schwerpunkt-Lothrechten. — Für die nunmehr wagerecht anzunehmenden Kräfte ist ein neues Krafteck nicht erforderlich; vielmehr denkt man sich das vorher benutzte um 90⁰ gedreht, d. h. man zieht die Seileckseiten jetzt nicht parallel zu den Polstrahlen, sondern rechtwinklig dazu.

Fig. 29.



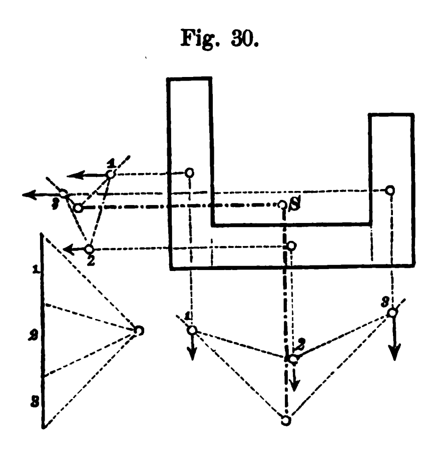
Der Schnittpunkt der äufsersten Seiten dieses Seilecks ist ein Punkt der Schwerpunkts-Wagerechten, womit nun der Schwerpunkt S gefunden ist.

Die Kräfte F_1, F_2 und F_3 sind im Krafteck in derjenigen Reihenfolge aufgetragen, wie sie als lothrechte Kräfte von links nach rechts auf einander folgten. Nach der Drehung um die Theilschwerpunkte ist aber die Reihenfolge der Kraftrichtungen zuweilen eine andere. Will man auch in diesem Falle das erste Krafteck benutzen, so hat man zu bedenken, dass einem zwischen zwei bestimmten Kräften liegenden Polstrahle immer diejenige Seite des Seilecks entspricht, welche diese beiden Kräfte verbindet. Bei Berücksichtigung dieses Umstandes ist die Reihenfolge der Kräfte gleichgültig, man muss sich nur beim Zeichnen des Seilecks nach der im Krafteck gewählten Reihenfolge richten. Einen solchen Fall zeigt Fig. 30. Im Krafteck ist die Reihenfolge F_1, F_2, F_3 gewählt, während die wagerechten Kräfte in der Ordnung F_1, F_3, F_2 auf einander folgen. Hierdurch wird das Seileck zickzackförmig: die auf F_1 folgende Seite lässt die zunächst darunter liegende Kraft F_3 unberücksichtigt, setzt sich

bis F_2 fort, und von hier aus geht die nächste Seite des Seilecks wieder aufwärts nach F_3, wo sich dann die letzte Seite anschliefst.

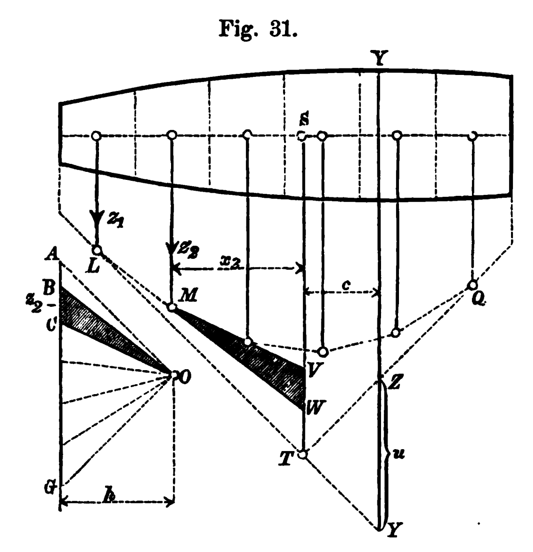
Ist die gegebene Figur krummlinig (Fig. 31), so zerlegt man sie durch parallele Linien, deren Abstände so zu wählen sind, dass die entstehenden Streifen als Trapeze betrachtet werden können. Hiermit stehen dann die Flächeninhalte ΔF der Streifen fest; führt man sie wieder auf Rechtecke von gemeinsamer Grundlinie d zurück, so hat man die Höhen z zu einem Kraftecke zusammenzusetzen.

Fig. 30.



Die Richtungslinien der Kräfte z legt man parallel den Trennungslinien durch die Schwerpunkte der Trapeze, welche man entweder nach bekanntem Verfahren bestimmt, oder (meist genau genug) als in die Mittellinie fallend betrachtet. Das Seileck der Kräfte z liefert dann in dem Schnittpunkte T der äufsersten Seiten einen Punkt der Mittelkraft und hiermit eine Schwerpunktsachse.

Fig. 31.



Das statische Moment S der ganzen Fläche in Bezug auf die Achse YY wird nach S. 20 gemessen durch das Produkt $u \times h$ (Polabstand). Darin bedeutet u die Länge, welche die äufsersten Seileckseiten auf YY abschneiden. Im Kraftecke sind nur Längen z aufgetragen, welche noch mit der gemeinsamen Grundlinie d zu multipliciren sind, um die ent-

sprechenden Flächen zu liefern. Daher bedeutet der Polabstand h auch eine lineare Gröfse, und zu dem Produkte $u \cdot h$ muss ebenfalls noch die Grundlinie d als Faktor hinzugefügt werden, so dass

$$S = u \cdot h \cdot d \quad \text{wird.}$$

Nennt man die veränderliche Höhe der Fläche y, so ist die Gesammtlänge der Kraftlinie im Krafteck offenbar $\int y\,d\,x$, das mit Hülfe des Seilecks gefundene statische Moment aber $S = \int y\,x\,d\,x$. Mittels des Kraft- und Seilecks werden daher diese beiden Integrale zeichnerisch gefunden.

2. Trägheitsmoment einer ebenen Fläche.

Betrachtet man in Fig. 31 einen beliebigen, z. B. den zweiten Flächentheil ΔF, welcher durch die Strecke z_2 im Kraftecke dargestellt wird, so entspricht demselben im Krafteck ein Dreieck $B\,C\,O$ von der Grundlinie z_2 und der Höhe h. Verlängert man aber im Seilecke die beiden Seiten, welche die Kraft z_2 einschliefsen, bis zur Schwerpunktsachse $S\,T$, so entsteht ein Dreieck $M\,V\,W$, welches mit $B\,C\,O$ ähnlich ist. Die Inhalte der Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der (hier wagerecht liegenden) Höhen x_2 und h, oder $M\,V\,W : B\,C\,O = x_2^2 : h^2$ und, weil $B\,C\,O = {}^1/_2\, z_2\, h$,

$$M\,V\,W = \frac{z_2\, h\, x_2^2}{2\, h^2} = \frac{z_2\, x_2^2}{2\, h}.$$

Der ersten Kraft z_1 entspricht in gleicher Weise das Dreieck $L\,W\,T$, so dass ebenfalls $L\,W\,T = \frac{z_1\, x_1^2}{2\, h}$ sein muss. Die Dreiecke, welche sämmtlichen Kräften z entsprechen, bilden in ihrer Gesammtheit die Fläche $L\,Q\,T$, welche von dem Seileck $L\,Q$ und den Verlängerungen der äufsersten Seiten desselben ($L\,T$ und $Q\,T$) eingeschlossen wird und als S e i l l i n i e n d r e i e c k bezeichnet werden möge. Nennt man den Inhalt dieser Fläche F', so wird $F' = \frac{\Sigma\, z\, x^2}{2\, h}$ oder, da d die gemeinsame Grundlinie

$$\text{1)} \qquad \Sigma\, d \cdot z \cdot x^2 = \Sigma\, \Delta\, F \cdot x^2 = 2\, d \cdot h \cdot F'.$$

Wären die Flächentheile ΔF unendlich schmal, so würde $\Sigma \Delta F x^2$ in $\int d F x^2$, gleich dem Trägheitsmomente J_s der gegebenen Fläche F in Bezug auf die Schwerpunktsachse $S\,T$, das Seileck aber in eine Seillinie übergehen, und die äufsersten Seiten würden Tangenten in den Endpunkten der Seillinie werden. Bezeichnet man nunmehr mit F' den Flächeninhalt zwischen der Seillinie und ihren äufsersten Tangenten, so wird

2) $$J_s = 2\,d \cdot h\,F'.$$

Giebt man im Kraftecke den äufsersten Polstrahlen Neigungen von 45^0 gegen die Kraftlinie, so wird $h = {}^1/_2\,A\,G$ und $2\,d \cdot h = d \cdot A\,G =$ dem Flächeninhalte F der gegebenen Figur,

3) $$\text{also } J_s = F \cdot F'.$$

F' bedeutet nun das Quadrat des Trägheitshalbmessers i; verwandelt man daher F' in ein Quadrat, so ist dessen Seite gleich i.

Das Trägheitsmoment J in Bezug auf eine zur Schwerpunktsachse $T\,S$ parallele Achse $Y\,Y$ mit dem Abstande c ist $J = J_s + F c^2 = 2\,d \cdot h \cdot F' + d \cdot \overline{A\,G}\,c^2$. Dem Krafteck $A\,G\,O$ ist aber das zwischen der Achse $Y\,Y$ und dem Punkte T liegende Dreieck $T\,Y\,Z$, dessen Inhalt F'' sein möge, ähnlich. Daher wird $F'' : A\,G\,O = c^2 : h^2$ oder $F'' : {}^1/_2\,\overline{A\,G} \cdot h = c^2 : h^2$, mithin $\overline{A\,G} \cdot c^2 = 2\,F''\,h$ und

4) $$J = 2\,d \cdot h\,(F' + F'').$$

Für die Ermittelung des Trägheitsmomentes in Bezug auf $Y\,Y$ hat man daher zu der Fläche F' noch die Dreiecksfläche $T\,Y\,Z$ hinzuzufügen und die Summe mit $2\,d \cdot h$ zu multipliciren. Bei $d \cdot h = {}^1/_2\,F$ würde

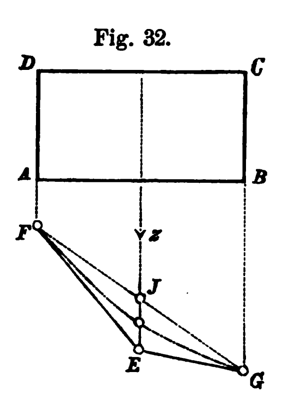
5) $$J = F\,(F' + F'')$$

werden.

Die Formeln 2 — 5 sind nur dann genau richtig, wenn man die Seillinie als Begrenzung der Fläche F' benutzt. Bei Ausführung der Zeichnung theilt man aber die Fläche in Streifen von endlicher Breite und erhält ein Seileck; es muss daher noch besprochen werden, in welcher Beziehung dieses zu der entsprechenden Seillinie steht.

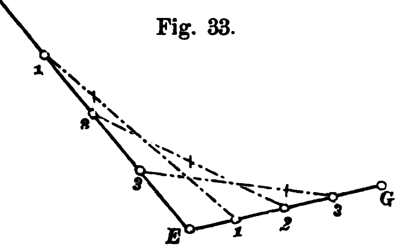
Ist ein rechteckiger Streifen $ABCD$ (Fig. 32) im Seileck als eine Einzelkraft behandelt und entspricht ihr der Knickpunkt E, so muss dieser Knick jetzt durch eine Kurve ausgerundet werden. Die entsprechende Seillinie ist wegen der gleichmäfsigen Höhe des Streifens eine Parabel mit senkrechter Achse, deren Geltungsbereich sich über die Breite des Streifens erstreckt. Denkt man sich die Breite AB in unendlich viele Theile zerlegt und (mit Beibehaltung desselben Poles im Krafteck) von F aus die Seillinie gezeichnet, so ist FE eine Tangente an die Seillinie im Punkte F. Bei G ist die Seillinie parallel mit GE; weil aber z die Mittelkraft der unendlich vielen dz zwischen A und B ist, so muss eine an den rechtsseitigen Endpunkt der Seillinie gelegte Tangente auch durch den Punkt E gehen, so dass eben GE diese Tangente ist mit dem Berührungspunkte G. Hiernach hat man zwischen F und G eine Parabel so einzulegen, dass sie die Geraden FE und GE in F und G berührt. Zieht man die Sehne FG, so halbirt die Parabel bekanntlich die lothrechte Strecke JE und ist im Halbirungspunkte mit der Sehne FG parallel. Nach diesen Anhaltspunkten kann man kürzere Parabeln mit genügender Genauigkeit in die Ecken des Seilecks einzeichnen. (Das Parabeldreieck FEG entspricht dem Trägheitsmomente des Streifens $ABCD$ in Bezug auf die eigene lothrechte Schwerpunktsachse.)

Fig. 32.



Ist die Breite AB des Streifens aber verhältnismäfsig grofs, so bekommt man für die Parabel FG eine beliebige Zahl von Tangenten, indem man FE und EG in gleich viel, z. B. 4, gleiche Theile zerlegt und nach Fig. 33 die Punkte 1 und 1, 2 und 2, 3 und 3 durch Gerade verbindet.

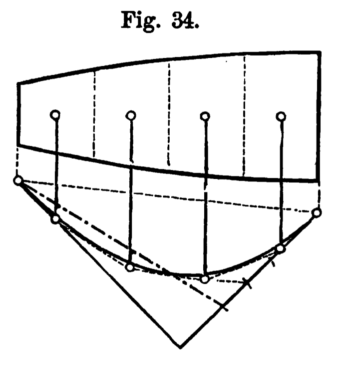
Fig. 33.



Die einzelnen Streifen der gegebenen Figur kann man nun mit genügender Genauigkeit

als Rechtecke betrachten und mithin die Knicke des Seilecks durchweg parabolisch ausrunden.

Fig. 34.



Die Gröfse der Fläche F' wird entweder mittels eines Polarplanimeters oder nach Simpson's Regel gefunden, oder aber, indem man sie nach S. 3 in ein Vieleck und darnach in ein Dreieck verwandelt. Zuweilen kann man, wenn die Höhe der gegebenen Figur nicht sehr veränderlich ist, die ganze Seillinie, wie in Fig. 34 geschehen, als eine einzige Parabel betrachten und F' nach S. 5 in ein Dreieck verwandeln; andernfalls theilt man sie in zwei oder drei Theile, deren jeder als eine Parabel betrachtet wird.

Diese Ermittelung der Trägheitsmomente ist von Mohr angegeben in der Abhandlung: Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1870, S. 43.

3. Schwerpunkts-Hauptachsen und Haupt-Trägheitsmomente einer ebenen Fläche.

Hat die gegebene Fläche keine Symmetrieachse, so legt man durch ihren Schwerpunkt ein für die Ermittelung der Trägheitsmomente J_x und J_y und des Centrifugalmomentes C möglichst bequemes rechtwinkliges Achsenkreuz. Für den Winkel α, den dann eine der beiden Hauptachsen mit der X-Achse bildet, gilt die Gleichung (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 21 und 22)

$$1) \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2C}{J_x - J_y}.$$

(Hierin ist $J_x \geqq J_y$ angenommen.) Bezeichnet man mit J_1 und J_2 das gröfsere bezw. das kleinere Haupt-Trägheitsmoment, so ist ferner

$$J_1 + J_2 = J_x + J_y \quad \text{und}$$
$$J_1 - J_2 = (J_x - J_y) \sec 2\alpha,$$

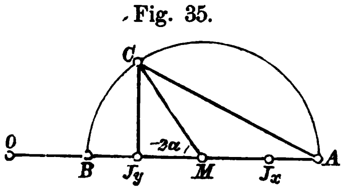
woraus sich ergiebt

$$2) \qquad J_{\substack{1\\2}} = {}^1/_2\,(J_x + J_y) \pm {}^1/_2\,(J_x - J_y) \sec 2\alpha.$$

Die Werthe für 2α, J_1 und J_2 sind leicht durch Zeichnung zu finden (nach Müller-Breslau, Graphische Statik, 2. Aufl., 1. Band, S. 39).

Wir nehmen an, J_x, J_y und C seien gefunden und nach irgend einem Mafsstabe durch Längen dargestellt. Auf einer Parallelen zur X-Achse trage man von einem Punkte O (Fig. 35) aus nach rechts die Länge $O J_x = J_x$ und ebenso $O J_y = J_y$ und im Punkte J_y die Länge $J_y C = C$ (nach oben, wenn das Centrifugalmoment positiv, und umgekehrt) auf. Ist nun M die Mitte zwischen den Punkten J_x und J_y, so hat man $OM = \frac{1}{2}(J_x + J_y)$ und $J_y M = \frac{1}{2}(J_x - J_y)$. Zieht man CM, so ergiebt sich $\frac{C J_y}{J_y M} = \frac{C}{\frac{1}{2}(J_x - J_y)}$, was nach Gl. 1 den Werth $-\operatorname{tg} 2\alpha$ oder $\operatorname{tg}(-2\alpha)$ bedeutet. Der Winkel $C M J_y$ ist also -2α, die Hypothenuse $CM = \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sec 2\alpha$ (da $\sec(-2\alpha) = \sec 2\alpha$). Diesen Werth CM muss man nach Gl. 2 mit $OM = \frac{1}{2}(J_x + J_y)$ positiv und negativ verbinden, um J_1 bezw. J_2 zu erhalten. Dies geschieht, indem man mit dem Halbmesser CM aus M einen Halbkreis zeichnet, welcher die X-Achse in B und A schneidet, dann ist offenbar

Fig. 35.



$$OA = OM + CM = J_1 \quad \text{und} \quad OB = OM - CM = J_2,$$

d. h. OA und OB stellen die beiden Haupt-Trägheitsmomente dar. Zieht man noch CA, so ist der Umfangswinkel CAB halb so grofs wie der Mittelpunktswinkel CMB, oder $CAB = -\alpha$. In den Gleichungen 1 und 2 bedeutete α den Neigungswinkel einer nach rechts ansteigenden Geraden. Bei positivem C ist dann nach Gl. 1 der Winkel 2α negativ, bedeutet eine nach rechts abfallende Linie, wie CM eine solche ist. Ebenso hat dann auch die eine der Hauptachsen eine nach rechts abfallende Neigung, ist daher parallel CA, während die andere dazu rechtwinklig steht. Gl. 1 liefert bekanntlich für α zwei Werthe; der hier benutzte ist ein spitzer, aber negativer Winkel, welcher demnach im vierten Quadranten liegt; dieser entspricht (nach Keck, Elasticitätslehre, S. 21) der ersten Hauptachse, deren Richtung sonach durch CA gegeben ist. Figur 35 liefert daher die Hauptträgheitsmomente und die Neigung der Hauptachsen.

Wir hatten vorausgesetzt, dass J_x, J_y und C als Strecken dargestellt waren, müssen also noch angeben, wie man hierzu gelangt. Man theilt die gegebene Fläche zunächst durch Theillinien parallel der Y-Achse, ermittelt nach S. 29 die Figur F'_x und hat damit $J_x = 2\,d \cdot h\,F'_x$. Wenn man nun F'_x auf ein Rechteck von der beliebigen Grundlinie d_1 zurückführt und dessen Höhe h_x nennt, so wird $J_x = 2\,d \cdot h \cdot d_1 \cdot h_x$. Ebenso erhält man $J_y = 2\,d \cdot h \cdot d_1 \cdot h_y$. Die Faktoren $2\,d \cdot h\,d_1$ sind bei beiden Werthen übereinstimmend, weshalb man sie nicht mit darstellt; vielmehr benutzt man zur Aufzeichnung der Figur 35 nur die Faktoren h_x und h_y, indem man $h_x = O\,J_x$ und $h_y = O\,J_y$ aufträgt.

Das Centrifugalmoment empfängt von einem Flächenstreifen F_1, dessen Schwerpunkt die Koordinaten x_1 und y_1 hat, den Beitrag $F_1\,x_1\,y_1$ (Keck, Elasticitätslehre, S. 23), weil der Streifen als ein Rechteck angesehen werden kann, dessen Seiten parallel den Koordinatenachsen. Daher wird $C = F_1\,x_1\,y_1 + F_2\,x_2\,y_2 + \ldots$. Nun ist aber $F_1\,x_1$ das statische Moment in Bezug auf die Y-Achse; bilden daher die beiden Seileckseiten, welche F_1 einschliefsen, auf der Y-Achse den Abschnitt u_1, so wird $F_1\,x_1 = d \cdot h u_1$ (nach S. 27) und man kann schreiben

$$C = d \cdot h\,(u_1\,y_1 + u_2\,y_2 + \ldots).$$

Den Klammerwerth kann man bestimmen, indem man seine Glieder wiederum als statische Momente von Kräften u mit den Abständen y von der X-Achse auffasst; d. h. man bringt in den Schwerpunkten der einzelnen Streifen Kräfte von den Gröfsen u_1, $u_2 \ldots$ an, deren Richtungen parallel der X-Achse und deren Sinn übereinstimmend oder entgegengesetzt aufgetragen wird, je nachdem die statischen Momente dem Sinne nach übereinstimmen oder nicht. Zeichnet man nun mit einem beliebigen Polabstande d_1 ein Kraft- und Seileck dieser Kräfte und nennt den Abschnitt der äufsersten Seileckseiten auf der X-Achse u, so ist $\Sigma u y = d_1\,u$, mithin $C = d \cdot h\,d_1\,u = 2\,d \cdot h\,d_1 \cdot {}^1/_2\,u$. Da nun $2\,d \cdot h\,d_1$ bei J_x und J_y als gemeinsamer Faktor behandelt war, so hat man in Fig. 35 C durch ${}^1/_2\,u$ darzustellen. Die einzelnen Kräfte u_1, u_2 usf. finden sich auf der Y-Achse schon in richtiger Reihenfolge vor. Man benutzt daher diese Abschnitte auf der Y-Achse zweckmäfsig sogleich als Krafteck der Kräfte u, indem man den Polabstand d_1 rechtwinklig dazu legt. Da die Kräfte u aber parallel der X-Achse sind, so hat man sich das Krafteck

um einen rechten Winkel gedreht zu denken, d. h. die Seileckseiten müssen zu den Polstrahlen nicht parallel, sondern rechtwinklig liegen.

Ist die gegebene Fläche in nur wenige Streifen getheilt, so kann man auch $u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots$ als Summe von Rechtecksflächen addiren, indem man sie auf die gemeinsame Grundlinie d_1 bringt; ist die gesammte Höhe dann u, so ist wiederum C durch $\frac{1}{2} u$ darzustellen. Man kann in solchen Fällen auch C leicht durch Rechnung finden und durch $2 d \cdot h d_1$ dividiren. Hat man nach S. 29 die äufsersten Polstrahlen des ersten Kraftecks je um 45° gegen die Kraftlinie geneigt, so ist durchweg $2 d \cdot h =$ der gegebenen Fläche F. Dies ist besonders zweckmäfsig, wenn man die Haupt-Trägheitshalbmesser a und b ermitteln will. Es ist nämlich

$$J_1 = 2 d \cdot h d_1 \cdot \overline{OA} \quad \text{und} \quad J_2 = 2 d \cdot h d_1 \cdot \overline{OB}$$

(Fig. 35) oder für $2 d \cdot h = F$:

$$J_1 = F d_1 \cdot \overline{OA} \quad \text{und} \quad J_2 = F d_1 \cdot \overline{OB}.$$

Die Trägheitshalbmesser werden also

$$a = \sqrt{d_1 \cdot OA} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{d_1 \cdot OB}$$

und sind als mittlere Proportionalen leicht zu zeichnen.

4. Schwerpunkts-Hauptachsen und Kern eines ungleichschenkligen Winkeleisen-Querschnittes.

Das Winkeleisen (auf Tafel 1 in Fig. 1 in wahrer Gröfse dargestellt) habe die Schenkellängen 10 und 5 cm bei 1 cm Stärke. Bei der Ermittelung der Schwerpunkts-Hauptachsen und der Trägheitsmomente sollen die Abrundungen (im Winkel nach 9 mm, an den Ecken nach 4,5 mm Halbmesser) unberücksichtigt bleiben, so dass die Figur nur aus 2 Rechtecken besteht. Führt man zunächst die Oberkante des wagerechten Schenkels nach rechts durch, so entsteht ein oberes Rechteck von der Fläche $F_1 = 9$ qcm mit dem Schwerpunkte S_1 und ein unteres Rechteck von dem Inhalte $F_2 = 5$ qcm mit dem Schwerpunkte S_2. Als gemeinsame Grundlinie nehmen wir $d = 4$ cm, so dass die Flächen durch $z_1 = 2{,}25$ und $z_2 = 1{,}25$ cm darzustellen sind. Die Kräfte z_1 und z_2 gehen mit wagerechter Richtung durch die Theilschwerpunkte S_1 und S_2. Oben rechts in der Figur findet man

das entsprechende Krafteck, dessen äufserste Strahlen unter 45^0 geneigt gezogen sind. Diesem entspricht das Seileck $LMNP$ (rechts von der Figur des Winkeleisens); die äufsersten Seiten schneiden sich in T. Der Schwerpunkt S des Winkeleisen-Querschnittes würde nun schon festliegen, da er sich auf der Wagerechten durch T und aufserdem auf der Verbindungsgeraden $S_1\,S_2$ der Theilschwerpunkte befinden muss. Für die Ermittelung der Trägheitsmomente aber muss man die Figur ein zweites Mal durch eine lothrechte Gerade (die linke Kante des lothrechten Schenkels) in 2 Flächen von 10 und 4 qcm zerlegen, muss durch die Schwerpunkte derselben lothrechte Kräfte legen, zu diesen ein neues Krafteck (links unterhalb der Figur) und Seileck von L_1 bis P_1 mit dem Schnitte T_1 der äufsersten Seiten zeichnen.

Nach Gl. 3, S. 29 ist das Trägheitsmoment J_x (auf die wagerechte Achse ST bezogen) $J_x = F \cdot F_x'$. Um F_x' zu erhalten, haben wir uns in das Seileck $LMNP$ von L bis Q und ebenso von Q bis P je eine Parabel mit wagerechter Achse eingelegt zu denken; dann besteht F_x' aus dem Dreieck MNT, dem Parabeldreieck zwischen Q und L und dem Parabeldreieck zwischen Q und P. Die Fläche des ersteren Parabeldreiecks ersetzt man aber nach Fig. 15, S. 7 durch das Dreieck QMR, wenn $MR = \frac{1}{3}ML$, und ebenso das zweite Parabeldreieck durch QNU, so dass F_x' nun durch das Viereck $UTRQ$ dargestellt wird, welches man nach S. 2 leicht in das bei T rechtwinklige Dreieck UTV umwandelt. Dieses führt man auf ein Rechteck von der beliebigen Grundlinie $d_1 = 2$ cm (oder auf ein Dreieck von der Grundlinie $2\,d_1 = 4$ cm) zurück und trägt die gefundene Höhe TJ_x als Länge OJ_x (ganz unten in der Figur) auf. Ebenso setzt man $J_y = F \cdot F_y'$, führt F_y' zunächst auf das Viereck $U_1\,T_1\,R_1\,Q_1$ zurück und stellt dieses durch die Länge $O\,J_y = T_1\,J_y$ dar.

Zum Centrifugalmomente C liefern beide Flächen positive Beiträge, weil S_1 im ersten, S_2 aber im dritten Quadranten liegt, das Produkt der beiden positiven Koordinaten x_1 und y_1 von S_1 positiv und dasjenige der beiden negativen Koordinaten x_2 und y_2 von S_2 ebenfalls positiv ist. Es ist

$$C = F_1\,y_1\,x_1 + F_2\,y_2\,x_2.$$

In Bezug auf die Schwerpunktsachse ST ist aber $F_1\,y_1 = F_2\,y_2$,

und zwar wird jedes dieser Produkte durch $\frac{1}{2} F \cdot u$ (wenn u der Abschnitt TW auf der wagerechten Schwerpunktsachse ST) ersetzt. Hiernach wird $C = \frac{1}{2} Fu(x_1 + x_2)$. Letztere Summe bedeutet den wagerechten Abstand der beiden Theilschwerpunkte und ergiebt sich hier zu 2^{cm}; wird daher die Fläche $C : F$ auf ein Rechteck der Grundlinie $d_1 = 2^{cm}$ gebracht, so ist dessen Höhe $\frac{1}{2} u$ und unten in der Figur als Länge $J_y C$ aufzutragen. Sucht man nun die Mitte zwischen J_y und J_x und zeichnet um diese als Mittelpunkt einen Halbkreis durch den Punkt C, so ergeben sich die Schnittpunkte J_1 und J_2; es zeigt dann $J_1 C$ die Richtung der ersten Hauptachse, während die Haupt-Trägheitsmomente J_1 und J_2 in der Art durch OJ_1 und OJ_2 dargestellt werden, dass der erste Haupt-Trägheitshalbmesser $a = \sqrt{2 \cdot OJ_1}$, der zweite $b = \sqrt{2 \cdot OJ_2}$ ist. Die Längen a und b sind in der Figur konstruirt.

Es soll nun auch der **Kern** des Winkeleisen-Querschnittes gezeichnet werden. Unter dem Kerne eines Querschnittes versteht man diejenige Figur, aus welcher der Angriffspunkt P einer Druckkraft nicht heraustreten darf, wenn alle Theile des Querschnittes nur Druckspannungen erfahren sollen, wenn also die Nulllinie der Spannungen nicht ins Innere des Querschnittes treten soll (s. Keck, Elasticitätslehre, S. 149). Fällt P an die Grenze des Kernes, so wird die zugehörige Nulllinie eine Tangente an den Querschnitt; bewegt sich der Angriffspunkt P der Druckkraft auf dem Umfange des Kernes, so umhüllt die Nulllinie den Querschnitt, und umgekehrt.

Betrachtet man die erste und zweite Schwerpunkts-Hauptachse als x- bezw. y-Achse und nennt x und y die Koordinaten eines beliebigen Angriffspunktes P, so schneidet die entsprechende Nulllinie die Hauptachsen in den Abständen v_x bezw. v_y vom Schwerpunkte, und es gelten dann die Beziehungen

$$x \cdot v_x = \frac{J_2}{F} = b^2, \quad y \cdot v_y = \frac{J_1}{F} = a^2.$$

Hiernach sind bei gegebenen x und y die Längen v_x und v_y leicht zu konstruiren, und umgekehrt.

Will man nun den K e r n des Winkeleisen-Querschnittes haben, so trage man (Keck, Elasticitätslehre, S. 150, Fig. 135) die beiden Trägheitshalbmesser a und b vom Schwerpunkte aus auf, aber nicht in den Richtungen, welche sie in der

Centralellipse haben, sondern um einen rechten Winkel dagegen verdreht, also auf der ersten Hauptachse $a = SA$ und $b = SB$ auf der zweiten Hauptachse. A und B sind dann Festpunkte für die Konstruktionen, welche mit den Beziehungen zwischen Spannungsmittelpunkt und Nulllinie verknüpft sind. Lässt man eine Gerade, als Nulllinie betrachtet, den Querschnitt umhüllen; so entspricht jeder Lage der Geraden ein Spannungsmittelpunkt, d. h. ein Punkt des Kernumfanges. Dieser Punkt beschreibt eine Gerade, solange die Nulllinie sich um einen Punkt dreht.

Die Kante DE schneidet die erste Hauptachse in F. Dann ziehe man von F nach dem Festpunkte B und zu dieser durch B eine Winkelrechte, so schneidet diese auf der ersten Hauptachse die Abscisse x des Kernpunktes K_1 ab. Ebenso zieht man von G nach dem Festpunkte A und dazu von A aus eine Winkelrechte, welche auf der zweiten Hauptachse die Ordinate y des Kernpunktes K_1 abschneidet. Hiermit steht der zur Kante DE gehörige Kernpunkt K_1 fest. Die untere wagerechte Kante des Winkeleisen-Querschnittes schneidet die zweite Hauptachse wiederum in einem bequem liegenden Punkte, welcher mit Hülfe des Festpunktes A die Ordinate des Kernpunktes K_2 liefert. Der Schnitt dieser Unterkante mit der ersten Hauptachse liegt aber, wie häufig vorkommt, nicht bequem benutzbar. In solchem Falle wählt man statt der Unterkante eine dazu parallele, hier also wagerechte Gerade HX, welche von dem Schwerpunkte S nur einen halb so grofsen Abstand hat, benutzt nun die Punkte X und B in der beschriebenen Weise und bekommt damit eine Abscisse, welche nun aber halbirt werden muss, um die wahre Abscisse des zur Unterkante gehörigen Kernpunktes K_2 zu liefern. Der Winkeleisen-Querschnitt wird durch 5 gerade Linien umhüllt. Der Kern wird daher ein Fünfeck, welches in der Figur stark strichpunktirt ist.

Wegen der Gegenseitigkeit der Beziehungen zwischen Spannungsmittelpunkt und Nulllinie kann man aber die Drehpunkte der letzteren, d. h. die Eckpunkte der Figur auch als Spannungsmittelpunkte auffassen und die entsprechenden Nulllinien suchen, dann liefern diese die Seiten des Kernes.

Um z. B. die dem unteren rechtsseitigen Eckpunkte D entsprechende Kernseite zu finden, zieht man von D aus Parallelen

zu den beiden Hauptachsen; dadurch ergiebt sich auf der ersten Hauptachse ein Schnittpunkt D_1. Durch diesen legt man eine Gerade nach dem Festpunkte B der anderen Achse und durch B dann eine Winkelrechte zu $D_1 B$, welche auf der ersten Hauptachse einen Punkt Y der gesuchten Geraden liefert. Durch sinngemäfse Wiederholung dieser Konstruktion auf der zweiten Hauptachse mit Benutzung des Festpunktes A erhält man den Punkt Z und damit die gesuchte Gerade YZ, welche dem Eckpunkte D entspricht. Bei Vernachlässigung der Abrundungen enthält die Figur 5 äufsere Eckpunkte, um welche sich die umhüllende Gerade dreht; daher ist der Kern ein Fünfseit.

5. Schwerpunkts-Hauptachsen und Kern eines ⅂-Eisen-Querschnittes.

Das ⅂-Eisen habe 12 cm Höhe, 0,7 cm Stegstärke, 6 cm Flantschbreite und 0,9 cm Flantschstärke (Tafel 1, Fig. 2). Die Abrundungen (nach 9 bezw. 4,5 mm Halbmesser) sollen auch hier nicht beachtet werden.

In gleicher Weise wie im vorhergehenden Beispiele theilt man die Fläche durch wagerechte Linien in Rechtecke (hier drei an der Zahl), führt dieselben auf eine gemeinsame Grundlinie, etwa $d = 4$ cm, zurück, zeichnet ein rechtwinklig gleichschenkliges Krafteck und danach das Seileck LMN für die obere Hälfte, wozu die untere symmetrisch sein würde. Der Knick bei M ist nun durch eine Parabel auszurunden, die aber nicht gezeichnet zu werden braucht, weil man weifs, dass das Parabeldreieck LMQ ein Drittel von dem geradlinigen Dreieck LMQ ausmacht. Ist daher $MV = \frac{1}{3} ML$, so ersetzt das geradlinige Dreieck QMV das Parabeldreieck. — Ebenso ist von Q bis zum symmetrisch zu denkenden Punkte eine Parabel einzuschalten, deren Parabeldreieck aber wiederum $\frac{1}{3}$ so grofs ist wie das geradlinige Dreieck. Man mache daher NW gleich $\frac{1}{3}$ der wagerechten Höhe dieses Dreiecks und hat in QW den Ersatz für die Parabel. Da die obere Hälfte des Seilecks symmetrisch zur unteren ist, so braucht man nur die obere Hälfte von F_x' zu ermitteln. Das Viereck $WQVT$ verwandelt man durch Beseitigung des Knickpunktes Q leicht in ein Dreieck und ver-

doppelt dies zu einem Rechteck von der Gröfse F'_x, welches in der Figur unter WT gezeichnet ist. — Mit Hülfe eines zweiten Kraftecks für lothrechte Kräfte zeichnet man dann ein zweites Seileck, von welchem aber (der Symmetrie halber) nur die linke Hälfte ausgezogen ist, und erhält in gleicher Weise ein Rechteck F'_y.

Der Steg hat das Centrifugalmoment Null, während die beiden Flantschen gleiche positive Beiträge zu C liefern. Das ganze Centrifugalmoment ist demnach $2 F_1 x_1 y_1$, wenn x_1 und y_1 die Koordinaten des Schwerpunktes S_1 von dem oberen Flantsch F_1 sind. Da nun der Polabstand des ersten Kraftecks gleich $^1/_2 F$, so wird $2 F_1 y_1 x_1 = F \cdot x_1 \cdot NT$; mithin ist $C:F$ ein Rechteck von der Breite NT und einer Höhe, gleich dem wagerechten Abstande der Schwerpunkte S und S_1. Diese 3 Rechtecke F'_x, F'_y und $C:F$ werden wieder auf eine gemeinsame Grundlinie etwa $d_1 = 4^{\text{cm}}$ gebracht, und die entsprechenden Höhen trägt man in der besonderen Figur (unten) als OJ_x, OJ_y und $J_y C$ auf und findet Richtung und Gröfse der Haupt-Trägheitshalbmesser in derselben Weise, wie für das Winkeleisen beschrieben wurde.

Der Kern wird hier ein Sechseck und kann mit Hülfe der beiden Festpunkte leicht bestimmt werden.

6. Kern eines Mauerpfeilers.

Der Pfeiler habe die in Fig. 1, Taf. 2 in 1:40 dargestellte Grundrissform, die durch wagerechte und senkrechte Linien in je 3 Rechtecke zerlegt werden kann. Die Rechtecke sind auf solche von 40^{cm} Seite zurückgeführt und durch ihre Höhen ebenfalls im Mafsstabe 1:40 dargestellt, oder, was dasselbe sagen will, 1^{qcm} der Figur ist durch 1^{mm} dargestellt. Die in bekannter Weise gezeichneten Seilecke bestimmen den Schwerpunkt S, und die Flächen F'_x und F'_y sind in derselben Weise, wie in den vorstehenden Aufgaben ermittelt. Da die in der Figur senkrecht liegende Achse durch S die gröfsere Fläche F' liefert, so ist diese zur X-Achse gewählt, und in Uebereinstimmung damit ist auch in der Hülfsfigur die Gerade OJ_x senkrecht aufgetragen. Der Theilschwerpunkt S_3 liegt hiernach im ersten Quadranten, während S_1 und S_2 im dritten gelegen

sind, so dass die Beiträge zum Centrifugalmomente durchweg positiv ausfallen. Es ist

$$C = F_1 x_1 y_1 + F_2 x_2 y_2 + F_3 x_3 y_3.$$

Weil aber $F_1 x_1 = \frac{1}{2} F u_1$, $F_2 x_2 = \frac{1}{2} F u_2$ und $F_3 x_3 = \frac{1}{2} F (u_1 + u_2)$, so ergiebt sich $C = \frac{1}{2} F [u_1 (y_1 + y_3) + u_2 (y_2 + y_3)]$. Darin bedeuten $y_1 + y_3$ und $y_2 + y_3$ die wagerechten Abstände der Schwerpunkte S_1 und S_3 bezw. S_2 und S_3. Der Klammerausdruck bedeutet die Flächensumme zweier Rechtecke, die beim Punkte T rechts in der Figur gezeichnet sind. Die Flächensumme wird leicht auf ein Rechteck von der Grundlinie 2^{cm} gebracht, und die entsprechende Höhe als $J_y C$ in die Hülfsfigur eingetragen. In bekannter Weise ergeben sich dann die Punkte J_1 und J_2, sowie die Richtung $C J_1$ der ersten Hauptachse. Die Haupt-Trägheitsmomente werden:

$$J_1 = F \cdot 1^{cm}\ \overline{O J_1} \text{ bezw. } J_2 = F \cdot 1^{cm} \cdot \overline{O J_2},$$

wonach die Trägheitshalbmesser a und b konstruirt wurden. Die Auftragung von a und b auf der ersten bezw. zweiten Hauptachse liefert die Festpunkte A und B, mit deren Hülfe dann der 6seitige Kern leicht gefunden wird.

Vierter Abschnitt.

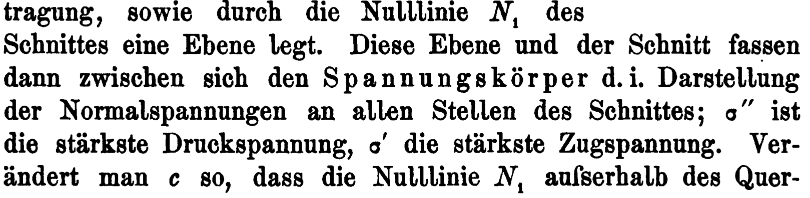
Vertheilung der Spannungen und Anstrengungen über einen Querschnitt.

---

1. Bestimmung der stärksten Spannungen bei excentrischer Belastung.

Liegt der Spannungsmittelpunkt P, d. h. der Angriffspunkt der Druckkraft P, auf einer Schwerpunkts-Hauptachse in dem Abstande c vom Schwerpunkte, so ist die entsprechende Nulllinie parallel der anderen Hauptachse und vom Schwerpunkte um v entfernt, wo (Keck, Elasticitätslehre, S. 143) $v = \frac{J}{Fc} = \frac{i^2}{c}$. Darin beziehen sich J und i, Trägheitsmoment und Trägheitshalbmesser, auf die andere Schwerpunkts-Hauptachse, auf welcher P nicht liegt. Um v zu konstruiren, trage man (Fig. 36) $SQ = i$ auf, ziehe PQ und dazu rechtwinklig QN, dann ist $SN = v$. Die Spannungsvertheilung für einen Schnitt kann man nun, wenn P die einzige äufsere Kraft oberhalb des Schnittes ist, leicht konstruiren, indem man im Schwerpunkte desselben die dort herrschende Spannung $P:F$ aufträgt und durch den Endpunkt dieser Auftragung, sowie durch die Nulllinie N_1 des Schnittes eine Ebene legt. Diese Ebene und der Schnitt fassen dann zwischen sich den Spannungskörper d. i. Darstellung der Normalspannungen an allen Stellen des Schnittes; σ'' ist die stärkste Druckspannung, σ' die stärkste Zugspannung. Verändert man c so, dass die Nulllinie N_1 aufserhalb des Quer-

Fig. 36.



schnittes fällt (Fig. 37), so erfährt der Querschnitt nur Druckspannungen. Für einen bestimmten Werth von $c = k' = \frac{i^2}{e'}$ (Fig. 38) wird die Nulllinie eine Tangente an den Querschnitt, indem $v = e'$ wird. Setzt man ebenso für die entgegengesetzte Seite $c = k'' = \frac{i^2}{e''}$, so dass die Nulllinie den Querschnitt an der rechten Seite berührt, so bilden k' und k'' die beiden Kernhalbmesser des Querschnitts in der Richtung der einen Hauptachse, auf welcher P liegt. Mit Benutzung dieser Kernhalbmesser wird dann die stärkste Druckspannung

$$\sigma'' = \frac{P}{F}\left(\frac{c}{k''} + 1\right),$$

die stärkste Zugspannung $\sigma' = \frac{P}{F}\left(\frac{c}{k'} - 1\right)$ (Keck, Elasticitätslehre S. 144).

Fig. 37.

Fig. 38.

Bei rechteckigem Querschnitt von der Breite d ist $i^2 = {}^1/_{12}\, d^2$, $e' = e'' = {}^1/_2\, d$, mithin $k' = k'' = {}^1/_6\, d$. Die Kernbreite in der Richtung der Kante d ist also das mittlere Drittel. In diesem Falle wird mithin

$$\sigma'' = \frac{P}{F}\left(\frac{6c}{d} + 1\right) \text{ als Druck,} \qquad \sigma' = \frac{P}{F}\left(\frac{6c}{d} - 1\right) \text{ als Zug.}$$

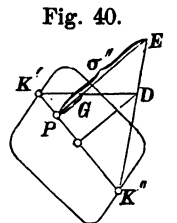
2. Verwendung des Kernes zur Bestimmung der stärksten Spannungen bei excentrischer Druckbelastung.

In Fig. 39 sei nicht der Querschnitt selbst, sondern nur dessen Kernfigur dargestellt. P sei ein aufserhalb des Kernes liegender Spannungsmittelpunkt, d. h. Angriffspunkt einer Druckkraft von der Gröfse P. Ist F die Fläche des gegebenen Querschnitts, so wird $P : F$ die mittlere Spannung, welche im Schwerpunkte S der Figur thatsächlich auftritt. Die stärkste Druckspannung σ'', sowie die stärkste Zugspannung σ' erhält man (Keck, Elasticitätslehre, S. 153, Fig. 138), indem man PSK'' zieht, welche den Kernumfang in K' bzw. K'' schneidet.

Fig. 39.

Rechtwinklig dazu trägt man die Schwerpunktsspannung $P:F = SD$ auf, legt auch durch P eine Winkelrechte zu PS und zieht $K''DE$, sowie $DK'G$, welche dann die Spannungen $\sigma'' = PE$ und $\sigma' = PG$ (Zugspannung) abschneiden. Liegt P innerhalb des Kernes (Fig. 40), so fällt der Punkt G zwischen P und E, und es bedeutet PG die Druckspannung $-\sigma'$.

Fig. 40.



3. Bestimmung der stärksten Biegungsspannungen mittels des Kernes.

Wirkt an dem Querschnitte anstatt einer Druckkraft P ein Kräftepaar in der durch PS (Fig. 41) bestimmten, rechtwinklig zur Bildebene stehenden Ebene, vom Momente M und sind k' bezw. k'' die beiden Kernhalbmesser in der Richtung PS, so ist die stärkste Zugspannung rechts unten am Querschnitte $\sigma' = \frac{M}{Fk'}$, die stärkste Druckspannung links oben $\sigma'' = \frac{M}{Fk''}$. (Keck, Elasticitätslehre, S. 154.) Die Kernhalbmesser geben also, mit der Fläche F multiplicirt, ohne Weiteres die Widerstandsmomente des Querschnittes an.

Fig. 41.

4. Vertheilung excentrischer Druckbelastung aufserhalb des Kernes bei Körpern ohne Zugfestigkeit.

Liegt der Spannungsmittelpunkt eines Querschnittes aufserhalb des Kernes, so fällt die Nulllinie in den Querschnitt, und die im Vorstehenden benutzten einfachen Beziehungen zwischen Spannungsmittelpunkt und Nulllinie gelten nur dann, wenn die auf der einen Seite der Nulllinie sich ergebenden Zugspannungen von der Festigkeit des Körpers auch wirklich aufgenommen werden. Nimmt man aber an, dass an einem Querschnitte nur Druckspannungen möglich seien und dass statt einer positiven elastischen Dehnung

eine Trennung, ein theilweises Oeffnen der Fuge eintrete, so kommt für die Spannungsvertheilung der s. g. wirksame Theil des Querschnitts in Frage, welcher auf derjenigen Seite von der Nulllinie liegt, die auch den Spannungsmittelpunkt enthält. Ist dann AN die als Y-Achse benutzte Nulllinie, AX ein beliebige Abscissenachse, so gilt für die Abscisse des Spannungsmittelpunktes P (Keck, Elasticitätslehre, S. 158) die Gleichung

$$x_m = \frac{J}{S \sin \gamma}.$$

Darin bedeuten: J das Trägheitsmoment, S das statische Moment des wirksamen Querschnittes in Bezug auf die Nulllinie, γ den Winkel der beiden Koordinatenachsen. Der Ausdruck für x_m ist leicht durch Zeichnung zu finden, wenn P auf einer Symmetrieachse des Querschnittes liegt. (Mohr, Hannov. Zeitschr. 1883, S. 163.)

Spannungsmittelpunkt auf einer Symmetrieachse gelegen. In diesem Falle liegt die Nulllinie offenbar rechtwinklig zu jener Symmetrieachse, hat also bestimmte Richtung; unbekannt ist nur ihr rechtwinkliger Abstand $x_m = J : S$ (wegen $\gamma = 90^0$).

Setzen wir zunächst voraus, die Nulllinie NN sei gegeben, links davon liege der wirksame Querschnitt, und in diesem sei P zu suchen, dann kann man J und S mit Hülfe des Seilecks ermitteln. Man theile daher den wirksamen Querschnitt, in Fig. 42 ein Kreisabschnitt, durch Parallelen zur Nulllinie in Streifen, hier beispielsweise von 2^{mm} Breite, und trage die einzelnen Flächen, vertreten durch je $^1/_6$ der halben Höhe, in einem Krafteck mit beliebigem Pole auf (Grundlinie $d = 2{,}4^{cm}$), zu welchem man dann ein Seileck zeichnet. Die angenommene Nulllinie NN schneide die Seillinie in D, die im linksseitigen Endpunkte G an die Seillinie gelegte Tangente in E. Dann ist nach S. 29 $J_N = 2\,d \cdot h \cdot$ Fläche $GQDE$ und $S_N = d \cdot h \cdot DE$, mithin $x_m = \dfrac{2 \cdot GQDE}{DE}$. Verwandelt man also die Fläche $GQDE$ in ein Dreieck mit der Grundlinie DE, also DEF, so ist dessen Höhe $= x_m$. Eine durch F gezogene Lothrechte bestimmt also den Spannungsmittelpunkt P. Ist aber umgekehrt P gegeben, so bestimmt die Lothrechte durch P auf der Tangente GE den Punkt F, und es ist nun von F aus eine Gerade FD so zu ziehen, dass $FDE = GQDE$, oder dass $\Delta GFD =$ Fläche GQD

wird. Zur Auffindung dieser Geraden FD lege man zunächst nach Augenmaſs eine Linie FD_1 an, ermittele mit Hülfe des Plani-

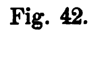
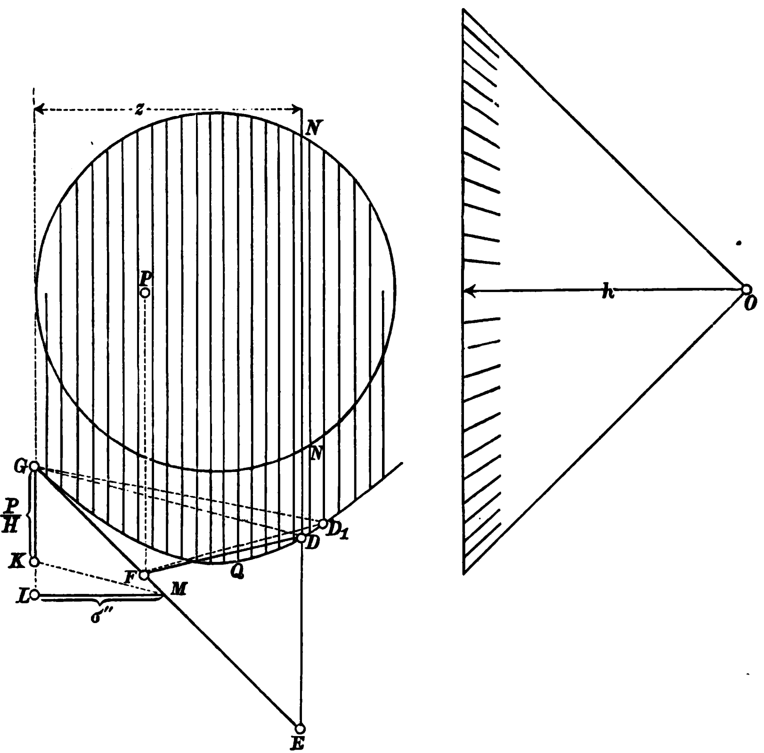


Fig. 42.



meters oder durch Flächenverwandlung GQD_1, sowie das Dreieck GFD_1 und bringe deren Differenz auf die Form des Dreiecks FDD_1, so dass $GQD_1 - GFD_1 = FDD_1$ wird, dann ist D der richtige Punkt und eine Lothrechte durch denselben die zu P gehörige Nulllinie. Denn es ist

$$GQD_1 = GQD + GDD_1;$$

ferner

$$GFD_1 = GFD + GDD_1 - FDD_1,$$

mithin

$$GQD_1 - GFD_1 = GQD - GFD + FDD_1$$

und weil der Zeichnung zufolge

$GQD_1 - GFD_1 = FDD_1$, so bleibt $GQD = GFD$.

Nennt man σ'' die stärkste Druckspannung im Abstande z von der Nulllinie, so ist (Keck, Elasticitätslehre, S. 150)

$$\sigma'' = \frac{P}{S} \cdot z = \frac{P}{d \cdot h \cdot DE} \cdot z.$$

Dies lässt sich in die Proportion bringen: $DE : \frac{P}{d \cdot h} = z : \sigma''$ und leicht konstruiren. $d \cdot h = H$ hat die Bedeutung einer Fläche, $P : d \cdot h$ also die einer ideellen Spannung. Diese trage man nach einem beliebigen Spannungsmaſsstabe als GK auf und ziehe $KM \parallel GD$, dann sind die Dreiecke GKM und GDE ähnlich, und es ist, wenn ML wagerecht:

$$DE : GK = z : LM, \quad \text{mithin } LM = \sigma''.$$

In Fig. 42 sei ein Kreis von $47{,}2^{\text{cm}}$ Halbmesser in $^1/_{20}$ dargestellt, in P wirke eine Druckkraft von $35\,000^{\text{kg}}$. In diesem Falle kann die Seillinie GQD noch wie eine Parabel behandelt werden. Es ist $h = 3{,}6^{\text{cm}}$, $d \cdot h = 8{,}64$ und wegen der Verkleinerung $= 8{,}64 \cdot 20 \cdot 20 = 3456^{\text{qcm}}$, mithin $\frac{P}{d \cdot h}$ rund 10^{at}, dargestellt durch $GK = 1{,}25^{\text{cm}}$. Dann ergiebt sich $ML = 1{,}7^{\text{cm}}$ gleichbedeutend mit $13{,}6^{\text{at}}$, während bei centrischer Belastung 5^{at} entstanden wäre.

Spannungsmittelpunkt in beliebiger Lage. Es ist auf Tafel 2, Fig. 2 derselbe Querschnitt gewählt, für den in Fig. 1 auf derselben Tafel der Kern gezeichnet wurde, und es ist nun ein Spannungsmittelpunkt P auſserhalb des Kernes gegeben. Man nimmt sodann nach Schepp (Centralblatt der Bauverwaltung 1884, S. 152) und Hüppner (Civilingenieur 1885, S. 39) für die Richtung der Nulllinie eine wahrscheinliche Richtung an, zieht mit dieser eine Gerade PF durch den gegebenen Punkt P und konstruirt nun ganz nach dem Vorhergehenden die entsprechende Lage $EDNN$ der Nulllinie. Diese wahrscheinliche Richtung ist hier in der Weise bestimmt, dass der ganze Querschnitt als wirksam vorausgesetzt und mittels der Festpunkte A und B in Fig. 1 zu P die entsprechende Nulllinie gesucht wurde. (Bei der Auftragung des Kraftecks ist $^1/_{10}$ der mittleren Breite eines Streifens zur Darstellung der Fläche desselben benutzt. Die Streifen sind in der Zeichnung 4^{mm} breit.) Es ist hiernach zu prüfen, ob die angenommene Richtung der Nulllinie die richtige war. Denkt man sich über den einzelnen Theilen der rechts

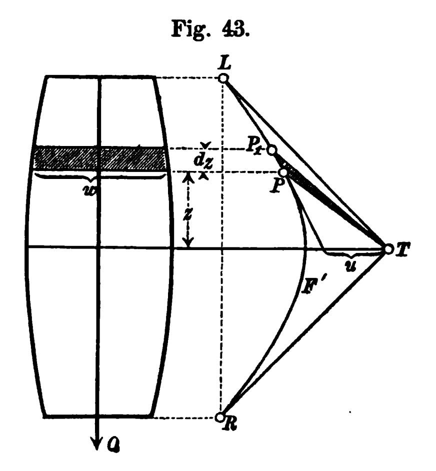
und oberhalb NN gelegenen wirksamen Fläche die entsprechenden Spannungen aufgetragen, so bilden deren Endpunkte eine, den Querschnitt in NN schneidende schiefe Ebene. Zwischen dieser und der wirksamen Fläche liegt ein keilförmiger Körper, der Spannungskörper. Die Mittelkraft aller Spannkräfte muss durch den Schwerpunkt dieses Spannungskörpers NQR gehen. Der Schwerpunkt muss auf der Geraden PF liegen. Einen zweiten Ort für ihn findet man durch folgende Betrachtung: Man bestimmt die Schwerpunkte der einzelnen Streifen ΔF, in welche man die gegebene Fläche zerlegt hat. Die entsprechenden Theile des Spannungskörpers sind offenbar proportional mit den Streifen ΔF und ihrem Abstande x von der Nulllinie, also mit $\Delta F \cdot x$, d. h. mit den statischen Momenten der Flächenstreifen ΔF in Bezug auf die Nulllinie, mithin (nach S. 27) auch proportional mit den Abschnitten u der verlängerten Seileckseiten auf der Nulllinie DE. Man denke sich also in den Schwerpunkten der Streifen parallele Kräfte von der Gröfse u wirkend und suche deren Mittelkraft. Die Richtung dieser Kräfte ist in der Figur nicht rechtwinklig zu den Streifen gewählt, weil die Kräfte sonst sehr nahe auf einander gefallen wären, sondern um 45^0 dagegen geneigt. Der DE gegenüber ist ein Pol O_1 gewählt, und die Seileckseiten sind um 45^0 gegen die zugehörigen Polstrahlen verdreht. Durch den Schnittpunkt S der äufsersten Seiten dieses Seilecks geht die Gerade SP_1, welche sich mit FP in P_1 schneidet. P_1 ist hiernach die Projektion des Schwerpunktes des Spannungskörpers auf die wirksame Fläche und zugleich der zur Nulllinie $NNDE$ gehörige Spannungsmittelpunkt, weil die äufsere Druckkraft P das Entgegengesetzte der Mittelkraft der inneren Spannkräfte sein muss. P_1 fällt hier nahe genug mit dem gegebenen Punkte P zusammen, so dass man NN mit genügender Genauigkeit als die gesuchte Nulllinie bezeichnen kann. Bei nicht genügendem Zusammenfallen von P_1 und P müsste man die ganze Konstruktion, mit einer etwas verändert angenommenen Richtung der Nulllinie, wiederholen. Die Ermittelung der stärksten Spannung σ'' erfolgt dann genau wie in Fig. 42, S. 45 gezeigt.

5. Vertheilung einer Querkraft über die Höhe eines Balkenquerschnittes.

Ist die X-Achse eine Schwerpunkts-Hauptachse des Querschnitts und wirkt in der Richtung der Y-Achse eine Querkraft Q, so kann das Seileck, welches im Vorstehenden zur Bestimmung des Trägheitsmomentes J_x benutzt wurde, auch dazu dienen, die Vertheilung der Querkraft Q über den Querschnitt darzustellen.

Bezeichnet man (Fig. 43) mit τ_y die auf die Flächeneinheit kommende Schubspannung in der Höhe z über dem Schwerpunkte, mit w die Querschnittsbreite daselbst, so ist (Keck, Elasticitätslehre, S. 57)

Fig. 43.



$$1) \qquad \tau_y w = Q \frac{S_z}{J}.$$

Darin bedeutet S_z das statische Moment des oberhalb z liegenden Querschnittstheiles, J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes, beide bezogen auf die wagerechte Achse. Ist aber h der Polabstand des zur Zeichnung des Seilecks benutzten Kraftecks, so lässt sich S_z (nach S. 28) ausdrücken durch $u h d$, wenn u den Abschnitt bedeutet, den die Endtangente $L T$ und die bei P angelegte Tangente auf der wagerechten Schwerpunktsachse bilden. Ebenso ist (nach S. 29, Gl. 2) $J = 2 d \cdot h F'$. Hiernach wird

$$2) \qquad \tau_y w = \frac{Q}{F'} \frac{u}{2},$$

Derjenige Theil der Querkraft Q, welcher von dem Höhentheilchen dz des Querschnitts aufgenommen wird, beträgt $dQ = \tau_y w\, dz = \frac{Q}{F'} \frac{u}{2} dz$. Zieht man aber durch oberen und unteren Endpunkt von dz Wagerechte, welche die Seilkurve in P und P_1 schneiden und verbindet diese beiden Punkte mit T, so entsteht ein unendlich kleines Dreieck $P P_1 T$, dessen Flächen-

inhalt man leicht zu $\frac{1}{2}\,u\,dz$ findet. Nennt man diesen Inhalt dF', so wird aus vorstehender Gleichung

3) $$dQ = \frac{Q}{F'}\,dF' \quad \text{oder} \quad \frac{dQ}{Q} = \frac{dF'}{F'}.$$

Jedem Höhentheilchen dz des Querschnitts entspricht solch' ein Dreieck dF', und die Summe aller dieser dF' ist die ganze Fläche F'. Die Querkraft vertheilt sich also in demselben Verhältnisse über der Querschnittshöhe, wie die einzelnen zugehörigen Sektoren über die ganze Fläche F'.

Dieser Satz ist von Mohr gefunden; s. Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1877, S. 51.

Für $z = 0$ wird Gl. 2:

4) $$\tau_0\,w_0 = \frac{Q}{F'}\,\frac{u_0}{2},$$

wenn u_0 den wagerechten Abstand des Punktes T von der Seilkurve bedeutet.

Bei rechteckigem Querschnitte von der Höhe h ist die Seilkurve eine Parabel, deren Pfeilhöhe gleich u_0, deren Fläche $\frac{2}{3}\,h\,u_0$. Das Parabeldreieck hat dann den Inhalt $F' = \frac{1}{3}\,h\,u_0$, und es wird

$$\tau_0\,w_0 = \frac{3\,Q}{h\,u_0}\,\frac{u_0}{2} \quad \text{und} \quad \tau_0 = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{h\,w_0},$$

worin $h\,w_0$ die Fläche des Querschnitts bezeichnet, da w_0 konstant ist (Keck, Elasticitätslehre, S. 58, Gl. 8).

Durch Division der Gl. 2 u. 4 entsteht noch

5) $$\frac{\tau_y\,w}{\tau_0\,w_0} = \frac{u}{u_0},$$

oder die auf die Höheneinheit kommenden Schubkräfte ändern sich verhältnisgleich mit den Abschnitten u.

Mit Hülfe der Gl. 2 kann die auf die Flächeneinheit kommende Schubspannung τ_y durch Zeichnung gefunden werden. Kennt man die Fläche F' des Seilkurvendreiecks, so kann der Quotient $Q : F'$ ermittelt werden. Derselbe hat die Bedeutung einer auf die Einheit von F' bezogenen Querkraft, d. h. einer (gedachten) Schubspannung und werde mit t bezeichnet. Dann kann man Gl. 2 schreiben:

6) $$w : \tfrac{1}{2}\,t = u : \tau_y\,.$$

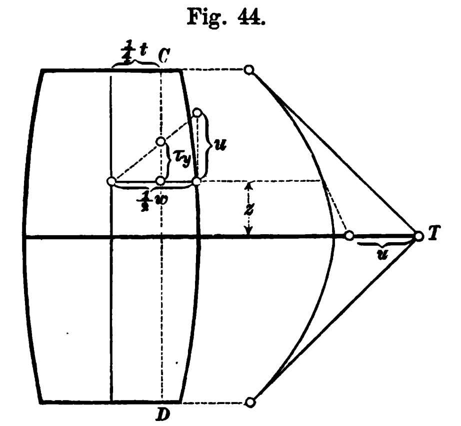
In irgend einer Höhe z kann man w und u abgreifen und die Proportion 6) mittels ähnlicher Dreiecke darstellen, d. h. τ_y

finden. Hat der Querschnitt eine lothrechte Mittellinie, so benutzt man zweckmäſsig die Form

7) $$\frac{1}{2} w : \frac{1}{4} t = u : \tau_y .$$

Die Gröſse $\frac{1}{4} t$ stellt man nach dem gewählten Spannungsmaſsstabe dar, indem man (Fig. 44) zu der lothrechten Mittellinie des Querschnitts in dem Abstande $\frac{1}{4} t$ eine Parallele CD zieht. Trägt man den irgend einer Stelle des Querschnitts entsprechenden Abschnitt u lothrecht an das Ende der halben Querschnittsbreite, so findet man laut Angabe der Figur leicht das entsprechende τ_y.

Fig. 44.



6. Spannungen und Anstrengungen an den verschiedenen Punkten des Querschnittes einer Eisenbahnschiene.

Eine Schiene von dem auf Taf. 3, Fig. 1 gezeichneten Querschnitte liege als einfacher Träger auf 2 Stützen in 90 cm Abstand und sei in der Mitte mit 6500 kg belastet. Dann beträgt der Auflagerdruck 3250 kg, und diese Gröſse hat auch die Querkraft Q an jeder Stelle. Das Moment in der Trägermitte ist $\frac{1}{4} \cdot 6500 \cdot 90 = 146\,250$ cmkg. Dieses trifft an dem Schnitte in der Trägermitte mit der Querkraft 3250 kg zusammen. Ersteres erzeugt Normalspannungen σ_x, letztere Schubspannungen τ_y, und von beiden hängen die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sowie die Anstrengungen an den verschiedenen Stellen ab. Die Ermittelung dieser Gröſsen soll nach dem Vorstehenden vorwiegend durch Zeichnung erfolgen.

Von dem Schienenquerschnitt ermitteln wir zunächst die Lage der wagerechten Schwerpunktsachse und das Trägheitsmoment J_1 in Bezug auf dieselbe. Zu dem Ende zerlegen wir den Querschnitt durch wagerechte (punktirte) Linien in solche Streifen, deren Flächen und Schwerpunkte sich leicht (genau oder annähernd) ermitteln lassen. Die Inhalte dieser Streifen werden auf eine gemeinsame Grundlinie $d = 4$ cm zurückgeführt (in Rechtecke verwandelt) und im Kraftecke durch ihre Höhen dargestellt.

Der obere, schwach gewölbte Theil des Kopfes wird als Parabelabschnitt betrachtet, dessen Fläche $^2/_3$ von der des umschriebenen Rechtecks, dessen Schwerpunkt um $^3/_5$ der Höhe von dem Scheitelpunkte entfernt ist.

Der nun folgende, seitlich abgerundete Theil des Kopfes wird in zwei Streifen zerlegt. Bei jedem derselben kann der Kreisbogen als Parabel behandelt und durch eine Gerade ausgeglichen werden, so dass Trapeze entstehen, deren Schwerpunkte annähernd in halber Höhe anzunehmen sind; d. h. man behandelt jedes der Trapeze wie ein Rechteck, dessen Breite gleich der mittleren Breite des Trapezes.

Der nun folgende Theil des Kopfes ist rechteckig, u. zw. kann man dieses Rechteck (unter Vernachlässigung der kleineren unteren Abrundung) als bis zur schrägen Unterseite des Kopfes reichend ansehen.

Hieran schliefst sich ein niedriges Trapez, dessen Schwerpunkt wiederum in halber Höhe anzunehmen ist.

Der abgerundete Uebergang in den Steg wird in zwei Streifen zerlegt, die wieder in Trapeze verwandelt werden.

Den Steg kann man als ein einziges Rechteck einführen; für die Ermittelung der Schubspannungen ist es jedoch vortheilhafter, ihn in mehrere Rechtecke zu zerlegen.

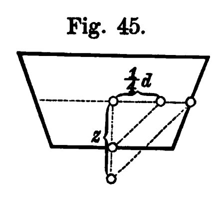
Die untere Ausrundung wird ebenso behandelt wie die obere.

Der Fufs endlich kann unter Vernachlässigung der kleinen Kantenabrundungen in ein Trapez und ein Rechteck zerlegt werden.

Diejenigen Flächentheile, deren Höhen in einfachem Verhältnisse zu der Grundlinie $d = 4^{\text{cm}}$ stehen, können durch Rechnung auf diese zurückgeführt werden. Auch bei dem obersten Parabelabschnitte geschieht die Zurückführung durch Rechnnng.

Bei den sonstigen Trapezen zieht man im Abstande $^1/_4\, d = 1^{\text{cm}}$ von der lothrechten Mittellinie des Querschnitts in Fig. 1, Taf. 3 eine Lothrechte und erhält durch die in der Figur 45 angegebene Parallelenziehung die Strecke z, welche den betreffenden Flächentheil ΔF im Kraftecke darstellt. Es ist nämlich durch die Konstruktion $^1/_4\, \Delta F = {}^1/_4\, d \cdot z$ gemacht, so dass $\Delta F = d \cdot z$.

Fig. 45.



Im Krafteck liefert Σz diejenige Strecke, welche, mit d multiplicirt, die ganze Querschnittsfläche F darstellt.

Zieht man nun die äufsersten Strahlen des Kraftecks unter 45 ^{0}, so ist der Polabstand $^1/_2 F:d$, und es kann hiernach das Seileck gezeichnet werden. Auf die Höhe eines jeden Streifens hat man nun die Knicke durch je eine Parabel auszugleichen; doch brauchen die Parabeln nicht gezeichnet zu werden, da man die zu F' gehörigen Parabeldreiecke leicht in gewöhnliche Dreiecke verwandelt. (In der Geraden, welche den ersten Streifen von dem zweiten trennt, haben 2 Parabeln einen gemeinsamen Berührungspunkt mit der zweiten Seite des Seilecks. Von diesem Punkte gleiche man beide Parabeln aus, nach oben und nach unten; überschlage den nächsten Berührungspunkt und wiederhole die Ausgleichung an dem dritten Berührungspunkte; auf diese Weise wird die Zahl der Ecken von F' nicht gröfser als nöthig. In dem hier vorliegenden Falle ist die Zahl der Theile so grofs, dass nur an einer Stelle eine Ausgleichung möglich war; im Uebrigen weicht das Seileck von der Seillinie nicht merklich ab.) Das zwischen den Endtangenten befindliche Vieleck wird nun nach Fig. 8, S. 3 ausgeglichen, d. h. es wird F' in ein rechtwinkliges Dreieck, durch Halbirung der einen Kathete in ein Rechteck und dann auch leicht in ein Quadrat verwandelt; die Quadratseite ist der erste Trägheitshalbmesser a und liefert mit $SA = a$ den ersten Festpunkt A.

Meist sind auch J_2 und der Kern erforderlich; daher sollen diese ebenfalls ermittelt werden. Wir theilen die eine Hälfte des Querschnittes durch lothrechte Linien in Streifen, denken uns die auf denselben Lothrechten liegenden Höhen in Kopf und Fufs an einander geschoben (addirt) und die Flächen der einzelnen Streifen ermittelt. Man zeichnet dann ein Krafteck mit lothrechten Lasten, nimmt den ersten Strahl unter 45 ^{0}, den letzten wagerecht und verfährt im Uebrigen wie vorher. Der Symmetrie halber brauchte nur die eine Hälfte behandelt zu werden; man bekommt zunächst $^1/_2 F'$, verwandelt dies in ein Dreieck und erhält, indem man aus dessen Breite und Höhe ein Rechteck zeichnet, in diesem die Fläche $F' = b^2$ und damit $SB = b$ und den zweiten Festpunkt B. Bei der Zeichnung des Kernes hat man an die Kopfwölbung einige Tangenten zu legen.

Um nun die Schubspannungen τ_y zu finden, hat man die gegebene Querkraft $Q = 3250^{kg}$ durch $F' = a^2$ zu dividiren. Der Quotient ist dann die Hülfsgröfse t. Als Spannungs-Mafsstab

werde etwa $10^{at} = 1^{mm}$ gewählt, und in diesem Maſsstabe trage man $^1/_4\, t$ auf, wie in Fig. 44, S. 50 angegeben. Die Ermittelung der Werthe τ_y in den verschiedenen Theillinien des Querschnittes geschieht dann nach S. 50. Es zeigt sich hierbei, dass alle Seileckseiten bis zur Schwerpunktsachse durchgezogen werden müssen, was natürlich sogleich bei der Zeichnung des Seilecks zu geschehen hat, damit man nicht zur nachträglichen Verlängerung gezwungen werde. Trägt man die gefundenen τ_y dann von der Mitte wagerecht auf, so ergiebt sich die Linie der Schubspannungen, welche man übrigens zur Bestimmung der Anstrengungen nicht nöthig hat.

Die Zugspannung σ' an der Unterkante ergiebt sich durch $\sigma' = \frac{M}{F k'}$, wobei k' der oberste Kernhalbmesser; dies wird wohl am einfachsten durch Rechnung ermittelt. Von der Mitte der Unterkante trage man nun $^1/_2\, \sigma'$ nach dem Spannungsmaſsstabe auf, ziehe vom Endpunkte dieser Strecke eine Gerade durch den Schwerpunkt und hat damit die Darstellung der halben Normalspannungen σ_x.

Um nun die Hauptspannungen zu finden, hat man die Schubspannungen τ_y in der ursprünglichen lothrechten Lage wagerecht nach der Mittellinie zu verschieben, so dass τ_y und $^1/_2\, \sigma_x$ rechtwinklig zu einander stehen; als Hypothenuse zu diesen beiden Katheten lässt sich dann $\sqrt{(^1/_2\, \sigma_x)^2 + \tau_y{}^2}$ abgreifen, und wenn man mit dieser (Keck, Elasticitätslehre, S. 65) einen Kreis schlägt, so erhält man leicht nach

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = {}^1/_2\, \sigma_x \pm \sqrt{(^1/_2\, \sigma_x)^2 + \tau_y{}^2}$$

die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 zu beiden Seiten der Mittellinie. Die Verbindung der Endpunkte dieser Strecken liefert die Darstellung der gröſsten Zug- und Druckspannungen.

Die Anstrengungen auf Zug ergeben sich, indem man zu den Zugspannungen σ_1 ein Viertel des absoluten Werthes der Druckspannungen hinzufügt; die Anstrengungen auf Druck in entsprechender Weise (Keck, Elasticitätslehre, S. 65).



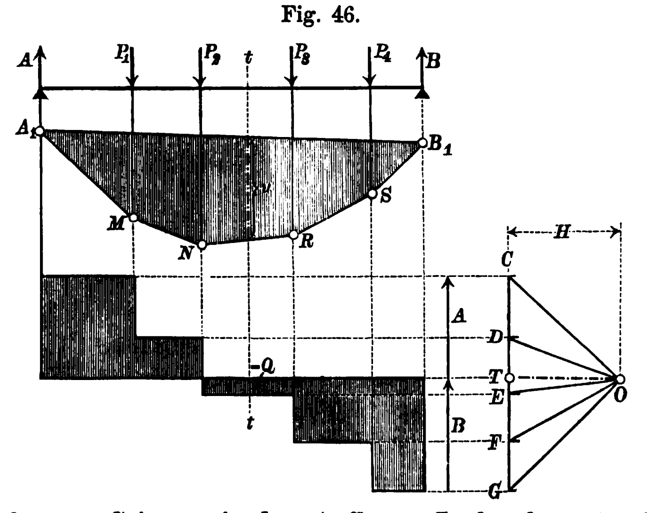
Fünfter Abschnitt.

Biegungsmomente und Querkräfte eines Balkens auf 2 Stützen.

1. Unmittelbare Belastung durch Einzelkräfte.

Trägt ein wagerechter Balken auf 2 Endstützen 4 beliebige lothrechte Lasten P_1, P_2, P_3, P_4, so müssen letztere durch die Auflagerdrücke A und B im Gleichgewichte gehalten werden. Daher findet man zunächst A und B nach Fig. 24, S. 18, indem man (Fig. 46) die Lasten nach irgend einem Kräftemafsstabe zu einem Kraftecke mit beliebigem Pole O vereinigt und hiernach das Seileck der Lasten zeichnet. Die Schnittpunkte A_1 und B_1

Fig. 46.



der äufsersten Seiten mit den Auflager-Lothrechten bestimmen die Schlusslinie $A_1 B_1$; ein zu dieser paralleler Polstrahl im Krafteck ist der Theilstrahl OT, welcher die Summe der Lasten P in die Auflagerdrücke A und B zerlegt, u. zw. ist A derjenige

Theil TC, welcher zwischen dem Theilstrahl OT und dem zur Seite A_1M parallelen Strahle OC liegt. Das Seileck ist auch die Darstellung der Biegungsmomente des Balkens. Führt man nämlich irgend einen lothrechten Schnitt tt durch den Balken und das Seileck, so befinden sich links von demselben die äufseren Kräfte A, P_1 und P_2. Diese Kräftegruppe liegt im Kraftecke zwischen den Strahlen OT und OE, die einschliefsenden Seiten des Seilecks sind die Schlusslinie und die durch den Schnitt getroffene Seite NR. Die Momentensumme der Kräfte links vom Schnitt in Bezug auf die Biegungsachse der Schnittstelle ist daher nach S. 20 das Produkt aus dem Polabstande H und der lothrechten Ordinate u des Seilecks (von der Schlusslinie aus gemessen). Diese lothrechten Ordinaten u lassen daher die Veränderlichkeit des Biegungsmomentes ohne Weiteres erkennen. Für die Ermittelung des Zahlenwerthes der Momente ist es offenbar bequem, den beliebigen Polabstand H in einer abgerundeten Gröfse zu wählen. Nach ihrer ursprünglichen Bedeutung sind die Abschnitte u auf dem Längenmafsstabe der Figur, H auf dem Kräftemafsstabe zu messen. Doch ist in dieser Beziehung auch das Entgegengesetzte gestattet, weil dadurch das Produkt $M = Hu$ nicht geändert wird.

Die gröfste Ordinate u wird sich stets an einem Knickpunkte des Seilecks finden; das gröfste Moment ergiebt sich daher, wenn nur Einzellasten vorhanden sind, in dem Angriffspunkte einer solchen.

Für die Darstellung der Querkräfte Q des Balkens empfiehlt es sich, das Krafteck der Höhe nach so zu legen, dass neben demselben und unter dem Balken der Raum bisher frei geblieben ist. Zieht man dann durch den Theilpunkt T der Lasten eine wagerechte Achse, sodann vom linken Auflager bis zur ersten Last P_1 eine Wagerechte durch C, von P_1 bis P_2 eine Wagerechte durch D und in derselben Weise Wagerechte durch die übrigen Grenzpunkte E, F und G der Lasten, so ist damit die Darstellung der Querkräfte vollendet. Denn zwischen dem Auflager A und der ersten Last ist die Querkraft gleich dem Auflagerdruck $A = TC$, sie beträgt zwischen den ersten beiden Lasten $A - P_1 = TD$, zwischen P_2 und P_3 sodann $A - P_1 - P_2 = TE$ usf.

Unter derjenigen Last, in deren Bereiche der Theilpunkt T im Kraftecke liegt, findet sich (beim Balken auf 2 Endstützen

mit gleichgerichteten Lasten) das gröfste Moment. In der Figur liegt T zwischen D und E, im Bereiche der Last P_2; die zu dem oberhalb T liegenden Strahle OD parallele Seileckseite MN schneidet (bei gehöriger Verlängerung) die Schlusslinie links von der Spannweite, während die zu dem unterhalb T liegenden Strahle OE parallele Seite NR die Schlusslinie rechts von der Spannweite trifft. Der Knickpunkt N des Seilecks, d. h. der Angriffspunkt von P_2, hat demnach die gröfste Ordinate (von der Schlusslinie aus gemessen), dem gröfsten Moment entsprechend. An dieser Stelle muss, wie aus der Figur ersichtlich, die Querkraft Q aus dem Positiven ins Negative übergehen.

Es ist bekanntlich die Querkraft $Q = dM : dx$ (Keck, Elasticitätslehre, S. 53). Bei seiner stetigen Belastung liegt das gröfste Moment an der Stelle, an welcher $Q = 0$ ist; bei einer Belastung aber durch Einzelkräfte erfolgt der Hindurchgang der Querkraft durch Null an der Stelle des gröfsten Momentes nicht stetig, sondern sprungweise. Trifft in einem besonderen Falle der Theilpunkt T mit einem Lastengrenzpunkte, z. B. E, zusammen, so wird die Schlusslinie mit einer Seileckseite NR parallel; die Momente sind dann unter den beiden benachbarten Lasten P_2 und P_3 und ebenso auch zwischen P_2 und P_3 von gleicher Gröfse; zugleich hat die Querkraft Q längs dieser Strecke durchweg die Gröfse Null. Solange die positiven Momente nach rechts hin zunehmen, ist Q positiv, und umgekehrt.

Will man das Seileck nachträglich so um A_1 drehen, dass die als Achse für die Momente dienende Schlusslinie wagerecht werde, so muss im Kraftecke der neue Pol O_1 auf einer Lothrechten durch O in gleicher Höhe mit dem Theilpunkte T liegen. Die Polarachse des ersten und des neuen Seilecks ist dann die Lothrechte durch A_1. Die Ordinaten u des neuen Seilecks (bezogen auf die neue, wagerechte Schlusslinie) sind die gleichen wie im ersten Seilecke, weil die Gröfse von H sich nicht geändert hat, und die Momente Hu von der beliebigen Höhenlage des Poles O selbstverständlich unabhängig sind.

In Fig. 47 ist ein Balken auf 2 Stützen dargestellt, an welchem eine abwärts gerichtete Last P_1 und eine aufwärts gerichtete Kraft P_2 wirken. Im Krafteck ist $CD = P_1$, $DE = P_2$. Im Seileck ist $A_1L \parallel OC$, $LM \parallel OD$, $MB_1 \parallel OE$; der Schlusslinie A_1B_1 ist OT parallel gezogen, wodurch der linksseitige

Auflagerdruck $A = TC$ (aufwärts), der rechtsseitige $B = ET$ (abwärts) bestimmt sind. Die lothrechten Ordinaten des Seilecks (von der Schlusslinie aus) geben, mit dem Polabstande H multiplicirt, die Biegungsmomente, und zwar sind dieselben von A_1 bis N positiv, wie bei dem einfachen Balken, von N bis B_1 negativ. Dem Momenten-Nullpunkte N entspricht in der Biegungslinie ein Wendepunkt; links von N kehrt die Biegungslinie ihre konvexe Seite nach unten, rechts von N nach oben. Die Querkräfte ergeben sich unmittelbar aus dem Kraftecke, gehen bei P_1 aus dem Positiven ins Negative, bei P_2 umgekehrt aus dem Negativen ins Positive über.

Fig. 47.

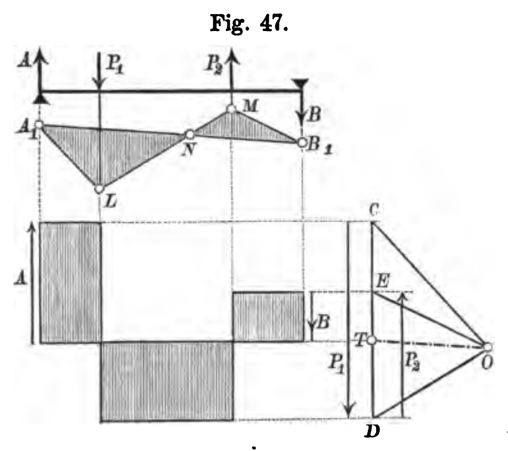
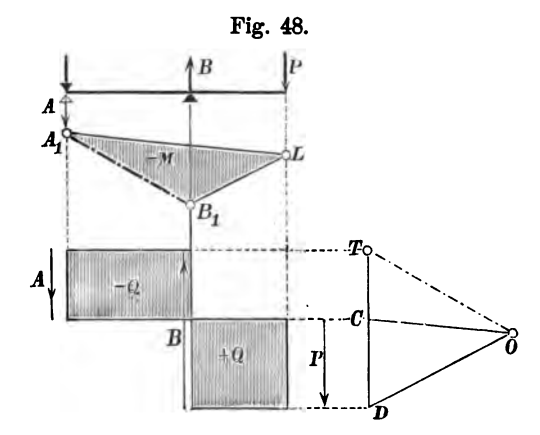


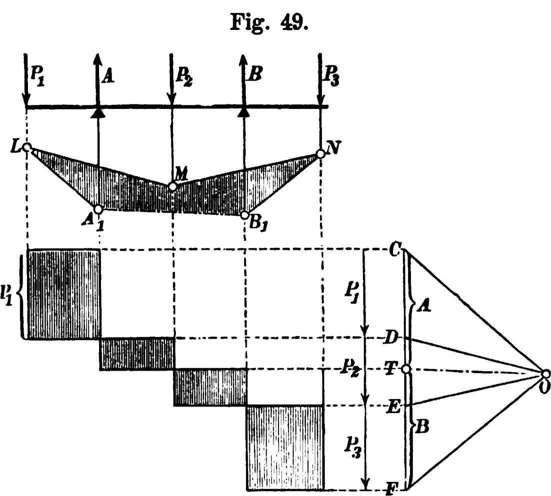
Fig. 48 zeigt einen überkragenden, am Ende belasteten Balken. Die Last P ist im Kraftecke durch CD dargestellt. Zum Strahle OC zieht man im Seileck $A_1 L$ parallel, ebenso $LB_1 \parallel OD$. $A_1 B_1$ ist die Schlusslinie; zieht man ihr parallel den Theilstrahl OT, so ist TC der nach unten gerichtete Auflagerdruck A, DT der aufwärts gerichtete Druck B. Die an den Balkenenden nach abwärts wirkenden Kräfte A und P erzeugen eine Biegungslinie, die in ihrer ganzen Länge die konvexe Seite nach oben kehrt. Die Momente sind dieserhalb durchweg negativ. Die Querkraft ist zwischen den Stützen negativ, im Uebrigen positiv.

Fig. 48.



Der beiderseits überkragende Balken (Fig. 49) trägt zwischen den Stützen die Last P_2, an den Enden die Lasten P_1 und P_3. Im Krafteck sind die Lasten $P_1 = CD$, $P_2 = DE$, $P_3 = EF$ unter einander aufgetragen. Das Seileck beginnt bei A_1 mit $A_1L \parallel OC$, woran sich $LM \parallel OD$, $MN \parallel OE$ und $NB_1 \parallel OF$ schliefsen. Zur Schlusslinie A_1B_1 ist OT parallel gezogen, welcher die aufwärts gerichteten Auflagerdrücke

Fig. 49.



$TC = A$ und $FT = B$ bestimmt. An den überkragenden Theilen kehrt die Biegungslinie die konvexe Seite offenbar nach oben, und da bei den in der Figur gewählten Verhältnissen das Seileck von der Schlusslinie nicht durchschnitten wird, so kommen Momenten-Nullpunkte nur an den äufsersten Lasten P_1 und P_3 vor. Die Biegungslinie hat daher keinen Wendepunkt, die konvexe Seite ist durchweg nach oben gekehrt, das Moment überall negativ. In den meisten Fällen aber schneidet die Schlusslinie das Seileck in 2 Momenten-Nullpunkten, zwischen denen das Moment dann positiv ist.

Die Querkräfte sind in der Figur ebenfalls dargestellt.

2. Unmittelbare stetige Belastung.

Ist ein einfacher Balken auf 2 Endstützen auf eine bestimmte Länge gleichmäfsig belastet (Fig. 50), so ersetze man die Last zunächst durch ihre Mittelkraft P, zeichne in bekannter Weise Kraft- und Seileck und hat damit schon die richtigen Auflagerdrücke. Das Seileck liefert für die unbelasteten Theile des Balkens auch die richtigen Biegungsmomente; für den belasteten Theil aber muss eine Parabel mit lothrechter Achse (Keck, Elasticitätslehre, S. 315) so eingefügt werden, dass sie

die Seileckseiten bei M und N berührt. Man theile ML und LN in etwa je 4 gleiche Theile und ziehe 3 Hülfstangenten.

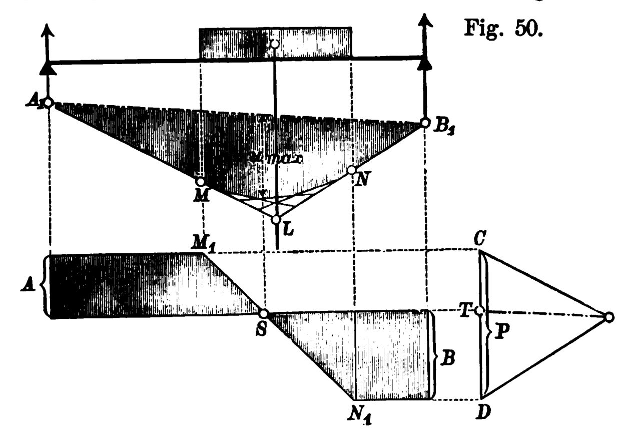


Fig. 50.

Die Querkraft ist links von der Last gleich A, rechts von derselben $-B$ und ändert sich längs der belasteten Strecke gleichmäßig, was durch die Gerade $M_1 N_1$ ausgedrückt wird. Der Schnittpunkt S dieser Geraden mit der Achse ($Q = 0$) zeigt die Stelle des größten Momentes $M_{max} = H u_{max}$.

Beispiel: Ein Holzbalken von 15 cm Breite, 30 cm Höhe und 5 m Länge sei auf die ersten 2 m unbelastet, auf die nächsten 2 m aber gleichmäßig

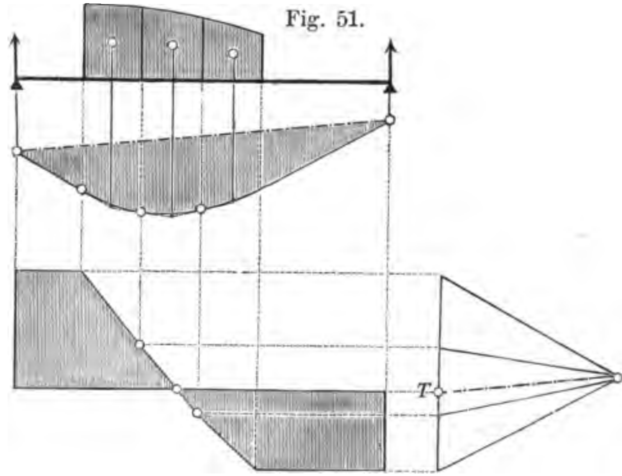


Fig. 51.

mit zusammen 2000 kg belastet. Man wähle als Längenmaßstab 1 : 50, als Kräftemaßstab 1 t = 2 cm. Es wird $M_{max} = 192\,000$ cmkg, die stärkste Spannung $= 192\,000 : 2250 = 86$ at.

Ist die Belastung ungleichmäfsig nach Mafsgabe der in Fig. 51 dargestellten Belastungsfläche, so zerlege man diese durch Lothrechte in Streifen und vertausche letztere mit Rechtecken gleicher Breite. In den Schwerpunkten der Rechtecke denkt man sich nun entsprechende Einzellasten angreifend und zeichnet in bekannter Weise Kraft- und Seileck. Letzteres muss dann längs der einzelnen Laststreifen durch Parabeln ausgerundet werden (soweit dies zeichnerisch möglich ist). Die Querkraft ändert sich auf die Breite jedes Laststreifens (annähernd) geradlinig und ist hierdurch bestimmt. An der Stelle, an welcher $Q = 0$, herrscht das gröfste Moment.

3. Mittelbare Belastung.

Werden die Lasten zunächst von einfachen, kürzeren Zwischenträgern aufgenommen und erst an deren Stützpunkten auf den Hauptbalken übertragen, so werden die Auflagerdrücke des letzteren (nach dem Gesetze der statischen Momente) durch das Zwischenmittel nicht beeinflusst. Man zeichnet (Fig. 52) daher

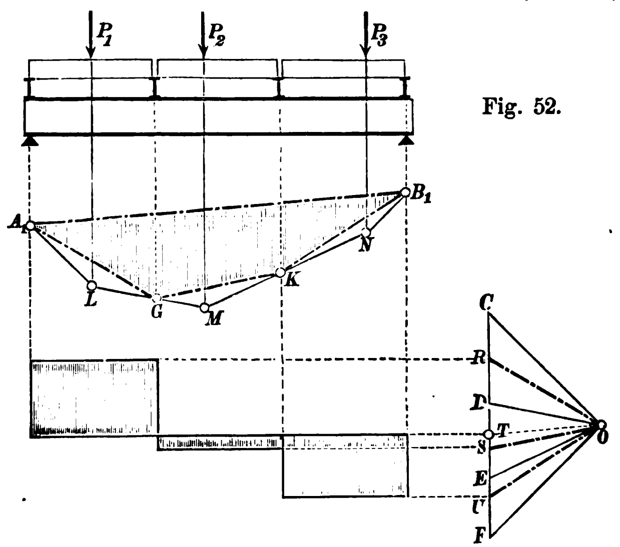


Fig. 52.

zu den gegebenen Lasten P_1, P_2, P_3 in gewöhnlicher Weise Kraft- und Seileck und den Theilstrahl OT. Führt man nun an den Stützpunkten der Zwischenträger lothrechte Schnitte, so

geben die Ordinaten der Punkte G und K des Seilecks die Momente des Hauptbalkens an diesen Stellen richtig an, denn die Momentensumme der äufseren Kräfte links vom Schnitte wird dadurch nicht geändert, dass sich die gegebenen Lasten nach dem Hebelgesetze in Zwischenträger-Auflagerdrücke (wofür wir Knotenlasten sagen wollen) zerlegen. Für die Darstellung der Momente des Hauptbalkens sind daher die Punkte A_1 G, K und B_1 richtig. Da aber der Hauptbalken nur an diesen Stellen Drücke erfährt, so hat man diese 4 Punkte durch die strichpunktirten Geraden zu verbinden, um die Momentenfigur für den Hauptbalken zu bekommen. Die Dreiecke $A_1 L G$, $G M K$ und $K N B_1$ sind die Momenten-Figuren der Zwischenträger.

Will man auch die Knotenlasten bestimmen, so ziehe man zu den neuen Seileckseiten $A_1 G$, $G K$ und $K B_1$ parallele Strahlen im Krafteck. Die neue Seite $A_1 G$ ist die Schlusslinie des kleinen Seilecks $A_1 L G$ des Zwischenträgers; der entsprechende Strahl $O R$ theilt deshalb die Last P_1 in die Knotenlasten P_1' bei A_1 und P_1'' bei G. Für die Strahlen $O S$ und $O U$ gilt das Gleiche. Die Knotenlasten sind daher der Reihe nach $C R$, $R S$, $S U$ und $U F$. Die Querkraft unmittelbar rechts vom linksseitigen Auflager ist $A - P_1' = T C - C R = T R$. Man ziehe daher eine Achse durch T und ferner Wagerechte durch R, S und U, so ist die Darstellung der Querkräfte gegeben.

Beispiel: I-Träger von 5 m Spannweite und 50 cm Höhe. Spannweite durch Querträger (von 25 cm Höhe) in 3 Felder getheilt, darüber Zwischenträger von 25 cm Höhe. In den Feldern je eine Last von bezw. 4 t, 5 t und 6 t. Längenmafsstab 1:50; Kräftemafsstab 1 t = 4 mm.

4. Verschiebung eines Balkens unter einer Lastengruppe.

Ist ein prismatischer Balken auf eine bewegliche Lastengruppe zu berechnen, z. B. auf Lokomotivlasten, so bilden diese ein System bestimmter Lasten in unveränderlichen Abständen, sie sind nur im Ganzen, nicht aber einzeln gegen einander verschiebbar.

Bei welcher Stellung der Lasten in dem Balken das gröfste Biegungsmoment entsteht, ist von vorn herein noch unbestimmt, es müssen daher verschiedene Stellungen mit einander verglichen werden. Bei Betrachtung der Fig. 46 auf S. 54 erkennt

man aber leicht, dass in der Darstellung der Momente, d. h. dem Seilecke, der gröfste Theil der Linien nur von der Lastengruppe bedingt wird, dass dagegen die Auflager-Lothrechten des Balkens nur die Schlusslinie und den Theilstrahl OT beeinflussen. Man wird daher zur Aufsuchung des gröfsten Momentes nicht unter einer festliegenden Spannweite verschiedene Seilecke zeichnen, sondern man zeichnet ein einziges (beliebiges) Seileck der gegebenen Lastengruppen, legt aber in dieses verschiedene Schlusslinien hinein, deren wagerechte Projektionen gleich der gegebenen Spannweite sind, mithin die jedesmalige Lage des unter den Lasten verschoben gedachten Balkens darstellen. Die unter diesen verschiedenen Schlusslinien erreichbare gröfste Ordinate u bestimmt dann das gröfste Moment.

Zur Auffindung der ungünstigsten Schlusslinien ist aber ein Satz von Nutzen, der im Folgenden entwickelt werden soll.

Ein Balken von der Spannweite l trage eine nur im Ganzen bewegliche Lastengruppe P_1 bis P_4 (Fig. 53). Die Mittelkraft R dieser Lasten liege um die Länge a von P_2 entfernt, und P_2 liege von dem rechtsseitigen Auflager in dem veränderlichen Abstande x. Dann ist der linksseitige Auflagerdruck

Fig. 53.

$$A = \frac{R}{l}(x - a). \tag{1}$$

Das Moment unter P_2 aber wird

$$M = A(l - x) - P_1 b. \tag{2}$$

Hierin sind M und A mit x veränderlich. Die Bedingung, dass das Moment unter der Last P_2 ein Maximum werde, ist ausgedrückt durch $dM : dx = 0$. Dies wird nach Gl. 2:

$$0 = (l - x)\frac{dA}{dx} - A$$

oder mit Hülfe von Gl. 1:

$$0 = (l - x)\frac{R}{l} - \frac{R}{l}(x - a),$$

was auch geschrieben werden kann:

$$x - \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}l. \tag{3}$$

Die Länge $x - \frac{1}{2}a$ ist aber der Abstand des rechten Auflagers von der Mitte zwischen P_2 und R; dieser Abstand muss nach Gl. 3 gleich der halben Spannweite sein, oder die Balkenmitte muss mitten zwischen P_2 und R liegen, damit das Moment unter P_2 möglichst grofs werde, oder es folgt der Satz: Das Moment unter einer bestimmten Last einer gegebenen Gruppe von Lasten wird möglichst grofs, wenn diese Last von der Trägermitte ebenso weit absteht, wie die Mittelkraft R der ganzen auf dem Balken befindlichen Gruppe.

In der Regel ist das gröfste Moment unter derjenigen Last zu suchen, welche der Mittelkraft R am nächsten liegt. Die Anwendung des Satzes soll an einem Beispiele erläutert werden.

Beispiel. Die 3 Triebachsen einer Lokomotive mögen je 13^t Last übertragen und 1,5^m von einander entfernt sein, während der Vorderbuffer der Lokomotive sich um 1,8^m von der vorderen Triebachse befindet. Um möglichst viel schwere Triebachsen zusammen zu drängen, stellt man 2 Lokomotiven mit den Vorderbuffern gegen einander. Es soll nun das gröfste Moment gesucht werden, welches diese Anordnung von Triebachsen auf einem Balken von 9^m Spannweite hervorbringen kann.

Alle 6 Achsen erfordern zur Aufnahme 9,6^m Länge; auf 9^m Spannweite finden daher höchstens 5 Achsen Platz. Es genügt aber nicht, die ungünstigste Stellung dieser 5 Achsen zu untersuchen, sondern es können 4 oder auch nur 3 dieser Achsen in ungünstiger Stellung noch gröfsere Momente erzeugen.

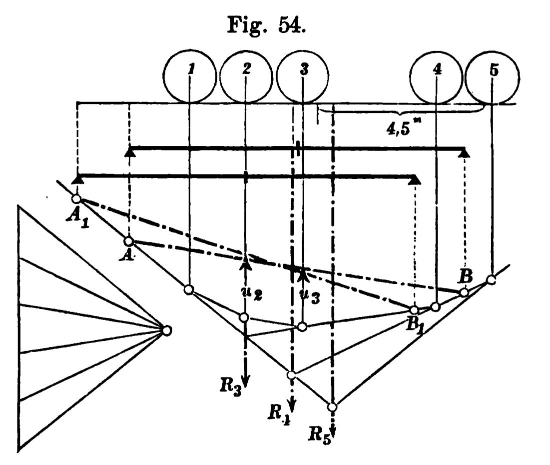
Wir beginnen mit der Gruppe von 5 Lasten, zeichnen zu diesen im Längenmafsstabe 1 : 100, im Kräftemafsstabe 1^t = 2^{mm} und mit einem Polabstande $H = 20^t = 40^{mm}$ Kraft- und Seilecke (Fig. 54 ist in kleinerem Mafsstabe gezeichnet), wobei zu bemerken, dass die erste Seite der ersten Last vorausgeht. Die Seileckseiten sind sogleich beim Zeichnen auf gehörige Länge durchzuziehen, damit man sie nicht nachträglich behufs Bestimmung einer Mittelkraft verlängern muss.

Aus dem Schnittpunkte der einschliefsenden Seiten erkennt man, dass die Mittelkraft R_5 aller 5 Lasten am nächsten bei der dritten Achse liegt, nämlich um 0,84^m rechts von derselben. Unter der dritten Achse ist daher ein gröfstes Moment zu vermuthen. Damit dieses entstehe, muss die Trägermitte den genannten Abstand von 0,84^m halbiren. Diese Mitte liegt dann aber vor der fünften Achse um 4,67^m, also um mehr als die halbe Spannweite (4,5^m) entfernt, d. h. bei dieser Stellung des Balkens befindet sich die letzte Achse gar nicht mehr auf demselben. Das Moment unter der dritten Achse kann daher ein analytisches Maximum nicht werden; es nimmt fortwährend zu, solange man den Balken unter den 5 Achsen nach links verschiebt. Sobald aber bei dieser Verschiebung das rechtsseitige Auflager unter der 5. Achse liegt, hat letztere keinen Einfluss mehr auf

die Momente, die fünf Achsen wirken daher ganz so, wie die Achsen 1 bis 4, daher verliert jetzt R_5 seine Bedeutung für die ungünstigste Balkenstellung, da sich für vier Achsen vermuthlich eine ungünstigere Lage ergeben wird.

Die Mittelkraft R_4 der ersten 4 Lasten liegt sehr nahe bei der dritten Achse, nämlich nur um 0,225 m links von derselben. Schlägt man von der Mitte dieses Abstandes die halbe Spannweite (4,5 m) nach links und nach rechts, so liegen die 4 Achsen wirklich auf dem Balken, und es ist bei dieser Anordnung das Moment unter der dritten Achse ein analytisches Maximum, welches durch die Ordinate u_3 gemessen wird.

Fig. 54.



Es ist noch zu prüfen, ob nicht 3 Achsen (1 bis 3) bei ungünstigster Stellung ein noch gröſseres Moment ergeben. In diesem Falle liegt die Mittelkraft R_3 in der Mitte (bei der Achse 2). Trägt man von dieser aus 4,5 m nach beiden Seiten ab und zieht Auflager-Lothrechte, welche das Seileck in A_1 und B_1 treffen, so schneidet die Schlusslinie $A_1 B_1$ unter der zweiten Achse eine Ordinate u_2 ab. Eine Vergleichung der Längen lässt dann $u_2 > u_3$ erkennen, so dass $M_{max} = H u_2$ das gröſste Moment ist, welches die gegebene Lastengruppe auf dem Balken von 9 m Spannweite erzeugen kann. Dieses gröſste Moment ergiebt sich $= 64{,}75$ mt.

Sechster Abschnitt.

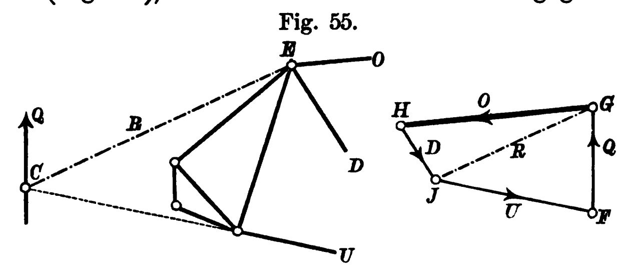
Das einfache Fachwerk.

---

1. Allgemeines.

Wird ein einfaches Fachwerk an irgend einer Stelle so durchschnitten, dass an der Schnittstelle 3 innere Spannkräfte O, D und U (im Obergurt, in einer Strebe und im Untergurt) auftreten (Fig. 55), so kann man für einen gegebenen Be-

Fig. 55.



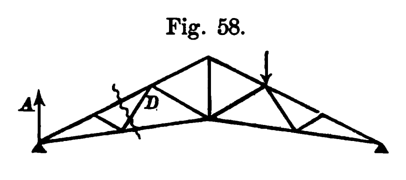
lastungszustand diese 3 Spannkräfte (Culmann, Graphische Statik, 1. Auflage, S. 363) in folgender Weise bestimmen: Man zeichne zu den gegebenen Knotenpunktslasten Kraft- und Seileck; dann ergiebt sich daraus der linksseitige Auflagerdruck A. Zieht man von diesem die links vom Schnitte befindlichen Lasten ab, so erhält man die resultirende äufsere Kraft Q nach Gröfse und Sinn; ihre Lage ergiebt sich mittels des Seilecks, da sie durch den Schnittpunkt der die fraglichen Kräfte einschliefsenden Seiten geht (der Schlusslinie und der dem Schnitt entsprechenden Seileckseite). Dieser Kraft Q müssen nun die Spannkräfte O, D und U, welche nach Richtung und Lage gegeben, nur nach Gröfse und Sinn unbekannt sind, das Gleichgewicht halten. Sämmtliche 4 Kräfte müssen ein geschlossenes Krafteck bilden. Zu diesem sind ohne Weiteres eine Seite (die Gröfse Q) und drei Winkel (bestimmt durch die Richtungen der durchschnittenen Stäbe) gegeben. Diese 4 Stücke genügen aber noch nicht zur Zeichnung des Vierecks, vielmehr muss noch ein fünftes Stück, nämlich die Richtung einer Diagonalen, aus der Lagenfigur der Kräfte (der Fachwerkzeichnung) bestimmt werden.

J setzt man U_2, an L aber D_2, deren Gröſsen durch den Schnittpunkt M bestimmt sind. Für den nächsten Schnitt behält Q noch denselben Werth, so dass TJM den Anfang des folgenden Vierecks bildet. O_2 an T, D_3 an M gesetzt, bestimmen den noch fehlenden Eckpunkt desselben. In dieser Weise setzt sich die Arbeit durch das ganze Fachwerk fort. Ist dasselbe nach Form und Belastung symmetrisch, so genügt selbstverständlich die eine Hälfte. Die Kräftefigur, welche die Gröſsen der Spannkräfte liefert, heiſst der Kräfteplan. Die Spannkräfte des unbelasteten Gurtes gehen in dem Plane strahlenförmig von T aus, während irgend eine Kraft U des belasteten Gurtes zwischen denjenigen beiden Lasten P ansetzt, zwischen welchen der betreffende Stab im Fachwerke liegt. Die Strebenkräfte D bilden einen zusammenhängenden, zickzackförmigen Linienzug. Die Spannkräfte solcher Stäbe aber, die im Fachwerk ein (ungetheiltes) Dreieck bilden, haben im Kräfteplan einen gemeinsamen Endpunkt.

3. Kräfteplan eines belgischen Dachstuhles.

Die Dachträger sind neben der ständigen Last einer beweglichen Belastung durch Schnee und Wind ausgesetzt; sie unterliegen hinsichtlich der ungünstigsten Belastungsart den betreffenden Gesetzen der einfachen Fachwerkträger. Daher ist für die Gurten eine (soweit möglich) volle Belastung anzunehmen. Die Wandglieder sind (Keck, Elasticitätslehre, S. 122 u. 171), falls der Momenten-Drehpunkt auſserhalb der Spannweite liegt, auf einseitige Belastung, wenn er innerhalb der Spannweite liegt, auf volle Belastung zu berechnen.

Fig. 58.



Ist der Dachträger aber so gestaltet, dass sich die geraden Gurten an den Auflagern schneiden (Fig. 58), so fällt der Momenten-Drehpunkt für die Wandglieder der linken Hälfte in das linksseitige Auflager. Diese Form bildet also eine Grenze zwischen den oben genannten beiden Hauptfällen, und man kann sie nach Willkür zu der einen oder anderen Gruppe zählen, kann also die Wandglieder für einseitige oder für volle Belastung berechnen. Von diesen beiden Möglichkeiten wird

man die volle Belastung vorziehen, weil diese auch für die Gurten maſsgebend ist. Einfache Dachträger mit geraden, an den Auflagern sich schneidenden Gurtlinien brauchen daher nur auf möglichst volle Belastung berechnet zu werden. (Wird der nach der Mitte etwa ansteigende Untergurt in den mittleren Fachen in wagerechte Richtung übergeführt, so muss für die Wandglieder dieser Fache die volle Belastung gewählt werden, weil der Drehpunkt nun innerhalb der Spannweite liegt.)

Führt man durch eine Strebe der linken Hälfte einen Schnitt und bringt rechts vom durchschnittenen Fach irgend eine Last an, so wirkt diese auf den linksseitigen Abschnitt des Trägers nur dadurch mittelbar ein, dass sie einen Beitrag zu dem Auflagerdrucke A liefert. Letzterer hat aber in Bezug auf den für D maſsgebenden Drehpunkt A das Moment Null, liefert also auch für die Strebe die Spannkraft Null. Für die durchschnittene Strebe sind daher nur linksseitige Lasten von Einfluss, rechtsseitige aber wirkungslos. Hierdurch erklärt es sich, dass man für die Strebenkraft D den gleichen Werth erhält, ob man ihn für einseitige oder für volle Belastung berechnet. Für eine Strebe der rechtsseitigen Hälfte gilt das entsprechende.

Die Zeichnung der Kräftepläne soll an bestimmten Zahlenbeispielen vorgeführt werden.

Beispiel: Belgischer Dachstuhl von 15^{m} Weite. Neigung des Obergurts 1:2, des Untergurts 1:6. Entfernung zweier Träger 4^{m}, wagerechter Abstand zweier Lastpunkte ${}^{15}/_{8}{}^{m}$.

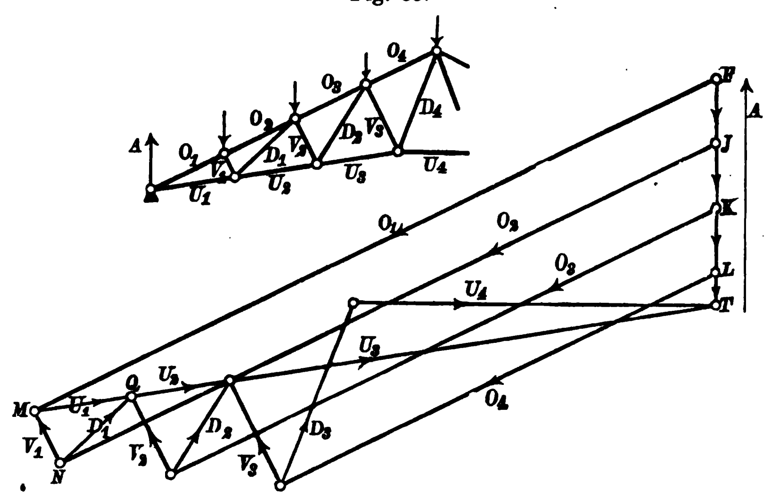
a) Kräfteplan für die lothrechte Belastung (Fig. 59). Ständige Last und Schneelast für 1^{qm} Grundriss 40 bezw. 75^{kg}, daher Knotenlast $G = 40 \cdot 4 \cdot {}^{15}/_{8} = 300^{kg}$ bezw. $P = 75 \cdot 4 \cdot {}^{15}/_{8} = 562{,}5^{kg}$, wofür rund 560^{kg}. Gröſste lothrechte Knotenlast also $300 + 560 = 860^{kg}$. Längenmaſsstab 1:200; Kräftemaſsstab: $100^{kg} = 1^{mm}$. (Für die Ausführung der Zeichnung ist das Doppelte dieser Gröſsen zu empfehlen.) Der Kräfteplan für lothrechte Lasten braucht nur für die eine Hälfte gezeichnet zu werden.

Die Knotenlast der Auflager bringt in dem Träger keine Spannung hervor, so dass wir mit 7 wirksamen Knotenlasten zu thun haben und der Auflagerdruck sich zu $A = 3{,}5\,(G + T)$ ergiebt. Diese $3\,{}^{1}/_{2}$ Knotenlasten sind im Kräfteplane aufgetragen.

Ein Schnitt durch O_1 und U_1 zeigt, dass A, O_1 und U_1 im Gleichgewichte sein müssen; dem entspricht das Kräftedreieck TFM, worin $O_1 = FM$ (Druck), $MT = U_1$ (Zug). — Dann durchschneidet man U_1, V_1, O_2; die äuſsere Kraft ist, da eine

Last links vom Schnitte liegt, $A-(G+P)=TJ$; MTJ ist der bereits bekannte Theil des Kräftevierecks; $MN \parallel V_1$ und

Fig. 59.



$JN \parallel O_2$ bestimmen den Eckpunkt N, u. zw. ist $JN=O_2$ (Druck), $NM=V_1$ (Druck, weil von der Schnittstelle gegen den am linksseitigen Abschnitte befindlichen Endpunkt von V_1 weisend). — Dem nun folgenden Schnitt durch O_2, D_1, U_2 entspricht noch dieselbe äufsere Kraft TJ, an welche sich das schon vorhandene O_2 schliefst. $NQ \parallel D_1$ und $TQ \parallel U_2$ (mit U_1 in dieselbe Gerade fallend) vollenden das Viereck und geben $NQ=D_1$ (Zug), $QT=U_2$ (Zug). So setzt sich der leicht verständliche Kräfteplan fort. Zu beachten ist nur, dass die U_1, U_2 und U_3 auf einander fallen, verschiedene Anfangspunkte, aber gemeinsamen Endpunkt T haben.

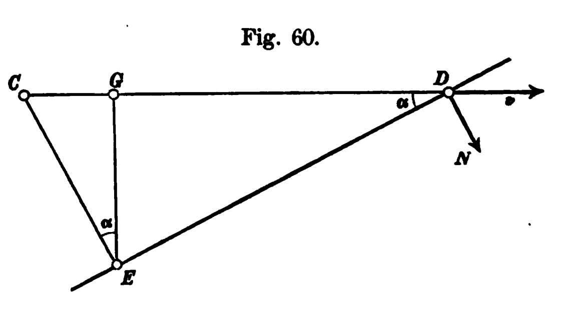
Dass die Gurtkräfte bei diesem Dachträger von den Enden nach der Mitte hin abnehmen, ist in Uebereinstimmung mit der Bemerkung, die in Keck, Elasticitätslehre, S. 181, zu Ende der Betrachtung über den parabolischen Fachwerksbalken gemacht wurde, ebenso, dass die Zugstreben nach der Mitte ansteigen und umgekehrt.

b) Kräfteplan für den Winddruck. Die Auflager A und B können nicht beide in wagerechtem Sinne unverschieblich sein, weil der Träger sonst statisch unbestimmt wäre. Bei der Berücksichtigung nur lothrechter Lasten war es gleichgültig,

welches Auflager das bewegliche ist; jetzt aber, wo ein schräg gerichteter Winddruck in Frage kommt, ist die Unterscheidung der beiden Auflager von Wichtigkeit, und wir wollen nun A als das bewegliche (Rollen-)Lager, B als das feste bezeichnen. Dann muss der Wind ein Mal von links, ein Mal von rechts kommend angenommen werden, weil diese beiden Fälle jetzt (wegen der verschiedenen Anordnung der Auflager) nicht mehr symmetrisch sind.

Schliefst die Richtung des Windes von der Geschwindigkeit v, die wir wagerecht annehmen, mit der Dachfläche von der Gröfse F den Winkel α ein, so kann man v zerlegen in $v \cos \alpha$ parallel der Fläche und $v \sin \alpha$ rechtwinklig zu ihr. Den im Wesentlichen winkelrecht zur Fläche F anzunehmenden Winddruck berechnen wir nach der Formel:

Fig. 60.



$$N = 2 \gamma F \frac{(v \sin \alpha)^2}{2 g} \quad \text{(wenn } \gamma \text{ die Dichte der Luft).}$$

Der Winddruck auf 1 ^{qm} rechtwinklig gegen die Windrichtung gestellte Fläche wird dann

$$w = 2 \gamma \frac{v^2}{2 g},$$

mithin, durch w ausgedrückt,

$$N = w \sin^2 \alpha F.$$

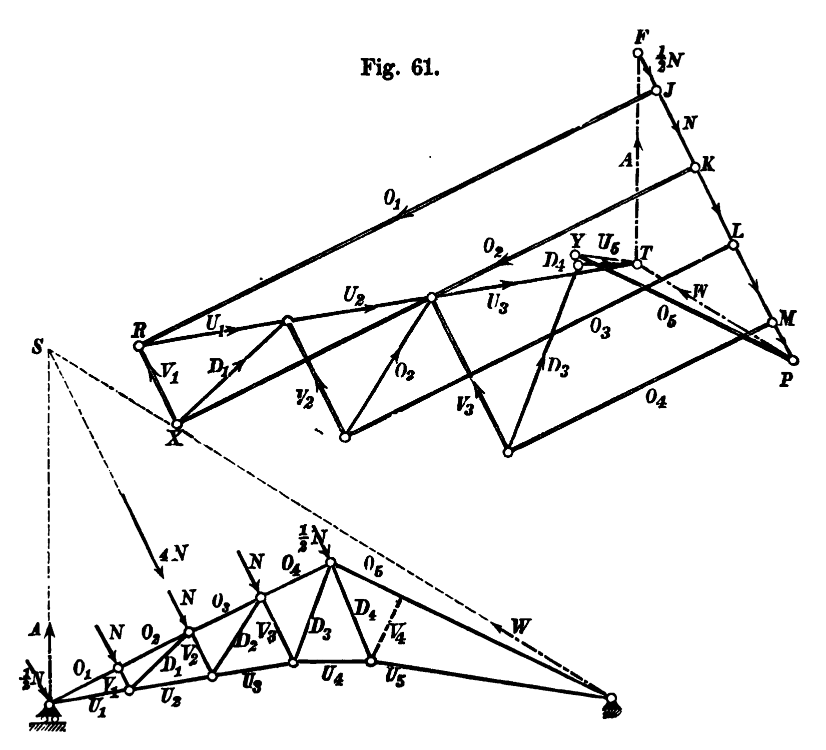
Die Gröfse $w \sin^2 \alpha F$ ist leicht durch Zeichnung zu finden: Man mache nach irgend einem Mafsstabe (Fig. 60) $CD = wF$, ziehe CE rechtwinklig zur Dachfläche und wiederum EG lothrecht; dann ist $CE = wF \sin \alpha$, $CG = wF \sin^2 \alpha$.

Der Einheitsdruck w kann bei stärkstem Sturme und freier Lage 250 ^{kg} erreichen. Hier möge $w = 200^{kg}$ angenommen werden.

Auf einen Knotenpunkt kommt dann (bei der Knotenpunkts-Entfernung $= 2{,}1^{m}$) $200 \cdot 4 \cdot 2{,}1 \cdot \sin^2 \alpha$. Man mache daher $CD = 1680^{kg}$ und erhält in CG den Knotendruck N.

Weht der Wind von links, so erfährt jeder der 3 mittleren Knoten der linken Dachhälfte einen Normaldruck N, der First und das linksseitige Auflager je $^1/_2\,N$. (Auch das auf A kommende $^1/_2\,N$ muss jetzt berücksichtigt werden, denn A ist nur gegen lothrechte Lasten fest, weicht aber bei anders gerichteten Lasten wagerecht aus und setzt den Träger in Spannung.)

Fig. 61.



Die Lasten setzt man (Fig. 61) zu ihrer Mittelkraft $4\,N$ zusammen; dieser müssen der lothrechte Auflagerdruck A und der schräge Widerstand W des rechtsseitigen Auflagers das Gleichgewicht halten. Da nun A und $4\,N$ sich in dem Punkte S schneiden, so muss auch W durch S gehen, ist daher seiner Richtung nach bestimmt. Im Kräfteplane trägt man die Lasten zu dem Kräftezuge $FJKLMP$ zusammen, legt durch F eine Lothrechte, durch P eine Parallele zu W und bekommt damit $A = TF$ und $W = PT$. Dieser Kräfteplan ist der Deutlichkeit wegen in dem Mafsstab $100^{\text{kg}} = 3^{\text{mm}}$ aufgetragen.

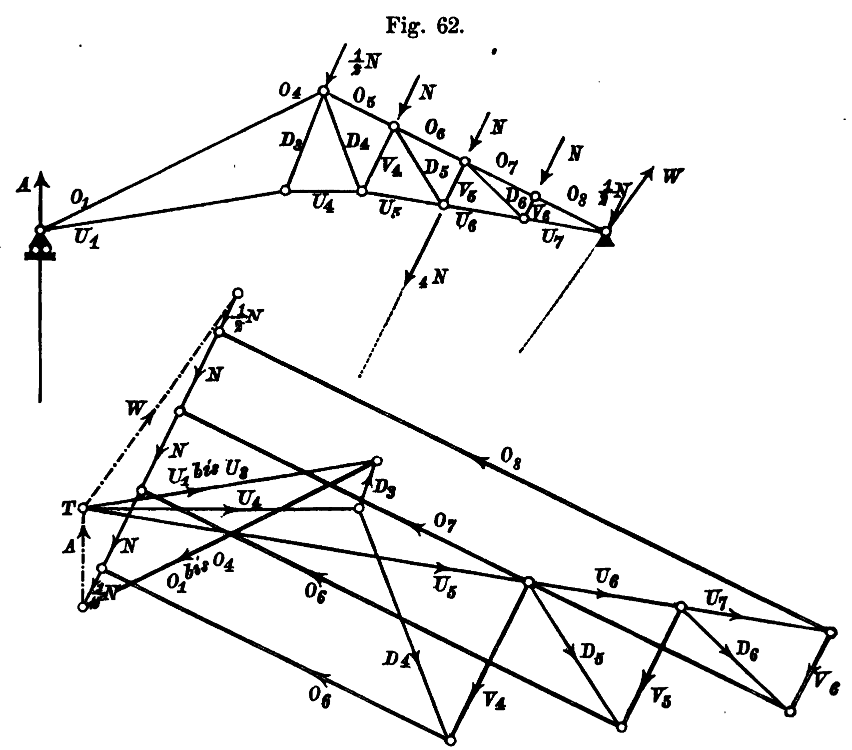
Ist der Punkt S nicht benutzbar, so zerlegt man $4N$ im Schnitt ihrer Richtungslinie mit der Verbindungsgeraden der Stützpunkte in wagerechte und lothrechte Kräfte H und V. Aus V ergeben sich dann nach S. 54 die lothrechten Auflagerdrücke A und B, und W setzt sich aus B und $-H$ zusammen.

Die Spannkräfte ergeben sich nun in derselben Weise wie für lothrechte Belastung. Für einen Schnitt durch O_1 und U_1 sind A und $^1/_2\,N$, dargestellt durch den Zug TFJ, die äufseren Kräfte; durch J eine Parallele zu O_1, durch T eine solche zu U_1 bestimmen den Schnittpunkt R und die Kräfte $O_1 = JR$ (Druck), $U_1 = RT$ (Zug). — Der nächste Schnitt durch U_1, V_1 und O_2 bringt eine neue Last $N = JK$ auf die linke Seite; das Krafteck beginnt daher mit $RTFK$ und wird durch $KX = O_2$ (Druck) und $XR = V_1$ (Druck) geschlossen. — So setzt sich die Arbeit fort bis zur Bestimmung von U_4, D_4 und O_5. Führt man dann einen Schnitt durch O_5, V_4, U_5, so ergiebt sich, dass der Kräftezug $TFPY$ aus A, $4N$, O_5 durch die Parallele YT zu U_5 schon geschlossen wird, dass also $V_4 = 0$ sein muss. Gleiches gilt für alle übrigen Wandglieder der rechten Hälfte. Führt man nämlich einen beliebigen Schnitt durch die rechte Hälfte, so trifft man ein O, ein U und ein Wandglied, deren Kräfte am rechtsseitigen Abschnitte mit W im Gleichgewichte sein müssen. Von diesen 4 Kräften gehen 3 durch den Punkt B, die Wandgliedkraft aber nicht. Hielten sich nun die 3 durch B gerichteten Kräfte nicht im Gleichgewichte, so würden sie eine durch B gehende Mittelkraft liefern, mit der aber die Wandgliedkraft nicht im Gleichgewichte sein kann (weil sie nicht durch B geht). Mithin müssen sich jene 3 Kräfte allein im Gleichgewichte halten, und die Wandgliedkraft ist Null. In Folge dessen ist dann auch auf der rechten Hälfte die Kraft im Obergurt durchweg $= O_5$, diejenige im Untergurt durchweg $= U_5$; W, U_5 und O_5 bilden ein Dreieck.

Weht der Wind von rechts (Fig. 62), so sind die Lasten N bezw. $^1/_2\,N$ auf der rechten Seite anzubringen; ihre Mittelkraft $4N$ schneidet sich mit A in S, und SB ist die Richtung von W. (Der Punkt S ist in der Figur nicht mehr angegeben.) Im Kräfteplane bestimmen sich die Kräfte A, W und die Spannkräfte in derselben Weise wie für die frühere Windrichtung. Auf der linken Hälfte werden die Wandglieder bis auf D_3 spannungslos.

Bei dem bisher erläuterten Verfahren wurde stets der ganze Trägertheil links vom Schnitte betrachtet. Zu denselben Er-

Fig. 62.



gebnissen und zu demselben Kräfteplane gelangt man auch, wenn man (nach C r e m o n a) kreisförmige Schnitte um die einzelnen Knotenpunkte führt und aus den an einem Knotenpunkte auftretenden Kräften ein Krafteck zeichnet. In Fig. 59 würde man, nachdem in der beschriebenen Weise O_1 und U_1 gefunden, um den nächsten Knoten des Obergurts einen Schnitt führen und aus O_1, der ersten Last FJ, aus O_2 und V_1 ein Viereck bilden. Dann folgt der nächste Knoten des Untergurts, von dessen Kräften U_1 und V_1 schon bekannt, D_1 und U_2 nun gefunden werden. Dabei ist dann nur zu beachten, dass eine Druckkraft O_1 auf den einen Knotenpunkt nach links, auf den nächsten aber nach rechts wirkt, so dass die Spannkräfte im Kräfteplane nicht mehr bestimmte Pfeilrichtungen haben. Von diesem Umstande abgesehen, ist die Cremona'sche Weise etwas einfacher.

In dem Vorstehenden haben wir das abweichende Verfahren deshalb vorgezogen, weil die hierbei feststehenden Pfeilrichtungen dem Anfänger eine gewisse Erleichterung bieten.

Von den beiden Spannkräften, die vorstehend für jeden Stab bei einem von links bezw. von rechts kommenden Winde ermittelt wurden, hat offenbar nur die gröfsere Bedeutung; diese ist zu der für lothrechte Belastung ermittelten Spannkraft hinzuzufügen. Will man auch etwa die nur von ständiger Belastung herrührende kleinste Spannkraft haben, so darf man die in Fig. 59 gefundene nur mit $G:(G+P)$, d. h. mit 300:860 multipliciren, was am einfachsten mit dem Rechenschieber oder mit einem Verkleinerungsmafsstabe geschieht.

4. Kräfteplan eines Wiegmann'schen Dachstuhles.

Der Dachstuhl habe 15 m Weite und dieselben Hauptzahlen wie im vorhergehenden Beispiele.

Der Kräfteplan (Fig. 63) beginnt mit O_1, U_1, V_1, O_2, D_1

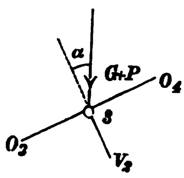
Fig. 63.

und U_2 in gleicher Weise wie beim vorigen Beispiele; versucht man nun aber, in derselben Art fortzufahren, so zeigt sich die

Schwierigkeit, dass ein Schnitt durchs nächste Fach oder auch um einen der benachbarten Knoten 3 noch unbekannte Spannkräfte liefert, die nach dem bisherigen einfachen Verfahren nicht bestimmt werden können. Gleichwohl ist der Dachstuhl nicht statisch unbestimmt, denn er ist aus lauter Dreiecken zusammengesetzt, und kein Stab ist geometrisch überzählig zur Festlegung der Form. Es muss hier nur eine andere Reihenfolge eingeschlagen werden.

Zunächst führt man einen kreisförmigen Schnitt um den Punkt 3 des Obergurts (Fig. 64); an diesem müssen sich O_3, O_4 und V_3 mit der im Kräfteplan durch KL dargestellten Last $G + P$ im Gleichgewichte halten. Zerlegt man $G + P$ nach der Richtung des Obergurts und rechtwinklig dazu, so wird erstere Seitenkraft durch die Resultirende der Gurtkräfte O_3 und O_4, letztere aber von V_3 aufgenommen. V_3 wird daher ein Druck von der Gröſse $(G + P) \cos \alpha$ oder $KL \cdot \cos \alpha$.

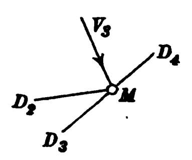
Fig. 64.



Diese Seitenkraft konstruiren wir, damit sie den sonstigen Kräfteplan nicht störe, in der Art, dass wir durch K und durch L Parallelen zum Obergurt legen; der rechtwinklige Abstand beider ist dann V_3 und im Kräfteplane vorläufig links unten als XY gezeichnet.

Nun wird um den inneren Knoten M ein kreisförmiger Schnitt durch V_3, D_2, D_3 und D_4 gelegt (Fig. 65). An diesem finden sich freilich drei unbekannte Kräfte, doch können D_3 und D_4, weil sie in dieselbe Richtung fallen, einstweilen durch ihre Mittelkraft $(D_4 - D_3)$ ersetzt werden. V_3 ist als Druckkraft gegen den Knoten M, d. h. abwärts gerichtet; zieht man durch den oberen Endpunkt X von V_3 (im Kräfteplane) eine Parallele zu D_2, durch den unteren Endpunkt Y eine solche zu D_3 und D_4, so schneiden sich beide in Z, und es ist $ZX = D_2$ (Zug), $YZ = (D_4 - D_3)$.

Fig. 65.



Hiernach kann nun der Schnitt durch U_2, V_2, D_2 und O_3 benutzt werden. Der linke Endpunkt N von U_2 ist der Anfang des Kräftezuges NTK; durch K zieht man die Richtung von O_3, durch N diejenige von V_2, jedoch über den Schnittpunkt beider hinaus, denn es muss die soeben gefundene Kraft D_2 noch zwischen

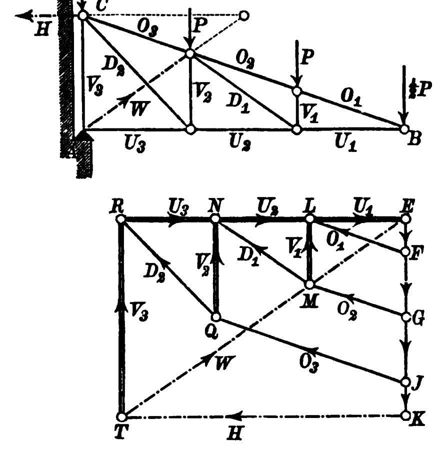
O_3 und V_2 so eingeschoben werden, dass der Punkt X auf die Richtung O_3, der Punkt Z nach der Verschiebung auf die Richtung V_2 fällt. Man zieht daher durch Z eine Parallele zu O_3 und bekommt dadurch den Eckpunkt R des Fünfecks, durch welchen dann mittels $RQ \parallel ZX$ auch der Punkt Q und somit die Kräfte $RN = V_2$ (Druck) und $KQ = O_3$ (Druck) festliegen. Bei regelmäfsiger Anordnung des Fachwerkes ist D_2 symmetrisch und gleich mit D_1, so dass QW in die Richtung von V_1 fällt. Man hat daher bei der wirklichen Zeichnung solcher Kräftepläne nicht nöthig, V_3 und D_2 erst eine unbestimmte Lage zu geben, kann ihnen vielmehr sogleich ihre endgültigen Stellen anweisen.

Ein Schnitt durch O_3, D_2, D_3 und U_3 liefert das Fünfeck $TKQRS$ mit $RS = D_3$ (Zug), $ST = U_3$ (Zug) und endlich ein Schnitt durch O_4, D_4 und U_3 das Viereck $STLW$ mit $LW = O_4$ (Druck), $WS = D_4$ (Zug).

Die Zeichnung der Kräftepläne für Winddruck hat nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeiten, so dass wir von deren Wiedergabe absehen.

5. Kräfteplan eines Kragdaches.

Der Dachträger ABC (Fig. 66) sei bei A an einer Wand befestigt, bei C wagerecht verankert. Jeder mittlere Knoten des Obergurts trage die Last P, während B und C je $^1/_2 P$ erhalten. Im Kräfteplane trägt man diese Lasten der Reihe nach unter einander, indem man mit derjenigen des Punktes B beginnt. Dann durchschneidet man O_1 und U_1 und erhält für diese das Krafteck $^1/_2 P$, O_1, U_1, aus welchem man O_1 als Zug, U_1 als Druck erkennt. Ein schräger Schnitt durch U_1, V_1 und O_2 bedingt sodann, dass U_1 und die Lasten $^1/_2 P$ und P mit der Unbekannten O_2 und V_1 im Gleichgewichte seien; es ist daher der Kräftezug LEG durch



$GM = O_2$ (Zug) und $ML = V_1$ (Druck) zu schliefsen. An einem senkrechten Schnitte durch O_2, D_1 und U_2 müssen nun diese Kräfte derselben rechtsseitigen Last wie soeben das Gleichgewicht halten; es muss mithin der Kräftezug EGM durch $MN = D_1$ (Zug) und $NE = U_2$ (Druck) geschlossen werden. In gleicher Weise liefern die Kraftecke $NEJQ$ und $EJQR$ die Spannkräfte O_3 und V_2 bezw. D_2 und $U_3 (= RE)$. Ebenso führt ein Schnitt durch U_3, V_3 und den Anker (H) auf das Krafteck $REKT$, womit H und V_3 bestimmt sind. Schliefslich muss der Widerstand W des Befestigungspunktes A den Kräften V_3 und U_3 gleichwerthig sein, d. h. durch TE dargestellt werden.

Eine Prüfung der Richtigkeit liegt darin, dass die Richtungslinie der im Punkte A angebrachten Kraft W sich mit der Richtung der Ankerkraft H in einem Punkte schneiden muss, der in der Lothrechten durch die Mitte der Dachfläche liegt, weil in diese Lothrechte die Mittelkraft der Lasten fällt.

Einen Kräfteplan dieses Daches für Winddruck, rechtwinklig zur Dachfläche, geben wir nicht, weil er sich von dem vorstehenden nur dadurch unterscheidet, dass die Lastlinie EK nicht lothrecht, sondern rechtwinklig zur Dachfläche steht.

6. Fachwerkträger einer Brücke.

An den Lastpunkten des einen, z. B. des unteren Gurtes mögen ständige und bewegliche Lasten G bezw. P von bestimmter Gröfse angebracht sein. Ob die einzelnen G bezw. P gleich oder ungleich, hat bei der zeichnerischen Behandlung wenig Bedeutung. Es ist nur zu beachten, dass die Lasten P vorhanden sein, aber auch fehlen können. Für einen einfachen Brückenträger gewöhnlicher Anordnung (z. B. nach Tafel 3, Fig. 2 (a)) müssen dann die Gurten auf volle Belastung aller Lastpunkte mit $(G + P)$, die Wandglieder auf einseitige Belastung berechnet werden (Keck, Elasticitätslehre, S. 171). Die Anordnung der Kräftepläne soll an einem Beispiele mit ungleicher Fachtheilung gezeigt werden.

Die Spannweite von 13^{m} sei durch Ständer in Fache von 1,9, 2,1, 2,5, 2,5, 2,1 und $1{,}9^{m}$ Länge getheilt. Die Ständerhöhen betragen: $1{,}7^{m}$, $2{,}5^{m}$, $2{,}9^{m}$, 2,5 und $1{,}9^{m}$. Weil reine Zugstreben

geplant sind, werden vorläufig lauter nach rechts fallende Streben angenommen (Keck, Elasticitätslehre, S. 190).

Die ständige Last betrage $g = 500^{kg}$, die bewegliche $p = 1750^{kg}$, die ganze also $g + p = 2250^{kg}$ f. d. ^{m}.

Man zeichnet zunächst einen Kräfteplan für volle Belastung. Die Knotenlasten werden entweder berechnet, oder durch Zeichnung gefunden. Der Längenmafsstab sei 1 : 200; der Kräftemafsstab $1^t = 2^{mm}$. Demnach ist z. B. für den ersten Knoten des Untergurts $G_1 + P_1 = \frac{1}{2}\ (g + p)\ (\lambda_1 + \lambda_2)$. Trägt man nach dem Kräftemafsstabe $g + p = 2{,}25^t$ als Höhe über den ersten beiden Fachen auf, so erhält man ein Rechteck vom Inhalte $(g + p)(\lambda_1 + \lambda_2)$. Bringt man dies auf ein solches von der Grundlinie 2^m, so ist die Höhe die gesuchte Knotenlast. Die einzelnen Knotenlasten sind auf Taf. 3, Fig. 2 b unter einander aufgetragen. Der Auflagerdruck A ist die Hälfte der ganzen Last. Hiernach konnte in der Weise, wie bei den vorhergehenden Beispielen der Kräfteplan für unveränderliche Last gezeichnet werden. Derselbe musste jetzt für den ganzen Träger durchgeführt werden, weil die Anordnung der Streben nicht symmetrisch ist. Dabei müssen aber $U_6 = U_1 = U_2$, $U_5 = U_3$ werden, wegen symmetrischer Lage der Momentenpunkte.

Die Ständer und Streben sind auf einseitige Belastung rechts bezw. links vom durchschnittenen Fache zu untersuchen, u. zw. soll hierbei vorläufig die Einwirkung der beweglichen Last allein ins Auge gefasst werden. Dies bietet für die Anwendung des allgemeinen Verfahrens nach S. 65 den Vortheil, dass bei rechtsseitiger Belastung sich links vom Schnitte gar keine Last befindet, der linksseitige Auflagerdruck A also die einzige äufsere Kraft des linksseitigen Stückes darstellt, welche hiernach stets eine bequeme Lage hat.

Führt man zur Ermittelung von $V_{2\,min}$ einen Schnitt durch O_2, V_2 und U_3, so müsste (Keck, Elasticitätslehre, S. 175) ein Einfluss-Nullpunkt im dritten Fache gesucht und die Last p von B aus bis zum Einfluss-Nullpunkte vorgeschoben werden. Es empfiehlt sich aber, der Einfachheit wegen noch etwas ungünstiger zu rechnen und (Keck, Elasticitätslehre, S. 180, Fig. 168) die bewegliche Last p von der rechten Seite her nur bis an das durchschnittene Fach vorzuschieben, an dem Vorderende der Last aber noch eine Einzelkraft $\frac{1}{2}\,p\,\lambda$ anzubringen, wenn λ die

Länge des durchschnittenen Faches darstellt. Ist x die Länge der belasteten Strecke, so wird nun der Auflagerdruck

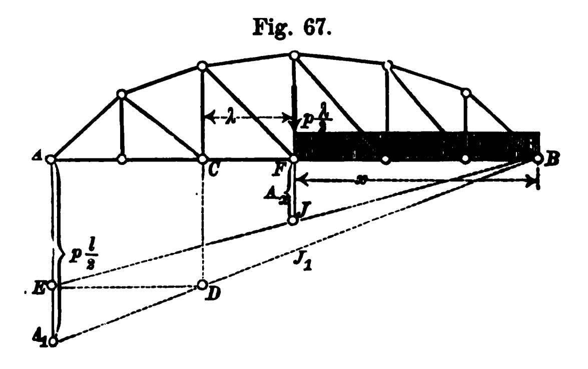
$$A_x = \frac{p\,x^2}{2\,l} + \frac{p\,\lambda}{2}\,\frac{x}{l} = \frac{p\,l}{2}\,\frac{x+\lambda}{l}\cdot\frac{x}{l}.$$

Dieser Werth kann für jeden Lastpunkt leicht konstruirt werden. Man trage (Fig. 67) am linken Auflager $A\,A_1 = {}^1/_2\,p\,l$ auf und ziehe $A_1\,B$. Diese Linie schneidet

$$CD = {}^1/_2\,p\,l\,\frac{x+\lambda}{l}$$

ab; überträgt man CD nach AE und zieht EB, so erhält man $FJ = A_x$.

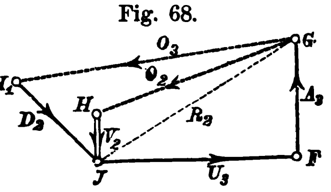
Fig. 67.



In Fig. 2 (a) auf Tafel 3 ist dies für jeden Lastpunkt konstruirt. Für eine Vorschiebung der Last bis zum Lastpunkte 3 findet man darunter A_3 aufgetragen.

Es muss dieser einzigen äufseren Kraft $Q = A_3$ durch die Spannkräfte O_2, V_2 und U_3 das Gleichgewicht gehalten werden. A_3 und U_3 schneiden sich in A, V_2 und O_2 im oberen Gelenkpunkte $2'$. Die Mittelkraft R_2 aus A_3 und U_3 bezw. V_2 und O_2 muss daher die Richtung $A\,2'$ haben. Man mache daher in Fig. 68 $FG = A_3$, ziehe durch F eine Wagerechte, durch G eine Parallele zu $A\,2'$, dann ist $GJ = R_2$; zieht man noch $GH \parallel O_2$, durch J eine Lothrechte, so ist $HJ = V_2$ mit der Richtung abwärts, was V_2, an den Abschnitt übertragen, als Druck kennzeichnet. Dieselbe Figur kann auch für D_2 dienen, da für diese derselbe Belastungszustand mafsgebend. Durch G eine $\parallel O_3$, durch J eine $\parallel D_2$ liefern den Schnittpunk H_1 und bestimmen $D_2 = H_1\,J$ (Zug). In gleicher Weise kann man für jedes Paar Ständer und Streben, die an einem unteren Gelenke zusammentreffen, eine entsprechende Figur

Fig. 68.



zeichnen. Diese Figuren sind von einander unabhängig. Will man sie zweckmäfsig vereinigen, so erfolgt dies (Müller-Breslau, Graphische Statik, zweite Aufl., Bd. 1, S. 308), indem man den Punkt G des Kraftecks an das Auflager A des Trägers schiebt. Dann braucht man die Richtungen der $R = GJ$ nicht parallel zu verschieben, sondern braucht nur die Linien $A\,2'$, $A\,3'$, $A\,4'$ nach links zu verlängern. Die Wagerechte durch den unteren Endpunkt von A_3 (Tafel 3, Fig. 2a) schneidet dann $A\,2'$ in dem Punkte J, die Lothrechte JH und die Parallele AH zu O_2 bestimmen dann $JH = V_2$. In dieser Weise sind links bei A der Kräfteplan für D_1, D_2, D_3, D_4, V_2, V_3 und V_4 bei einseitiger Belastung rechts vom durchschnittenen Fache gezeichnet. V_1 wirkt einfach als Hängestange für die Knotenlast; es ist daher $V_{1\,min} = G_1$, $V_{2\,max} = G_1 + P_1$.

Für einseitige Belastung links vom durchschnittenen Fache betrachtet man zweckmäfsig das Trägerstück rechts vom Schnitt, an welchem dann B die einzige äufsere Kraft darstellt. Die Werthe von B sind hier denen von A symmetrisch. Reicht die Last von A bis zum Ständer V_2, so wird der entsprechende Auflagerdruck B_2 ebenso grofs, als wenn die Lastpunkte 4 und 5 belastet waren, oder es ist $B_2 = A_4$. Die Kräftepläne für linksseitige Belastung legt man nun zweckmäfsig an den Angriffspunkt des Auflagerdrucks B. Um also z. B. V_2 zu finden, verlängert man $B\,2' = R_2$ nach rechts, bis sie sich mit einer Wagerechten durch den unteren Endpunkt von $B_2 = A_4$ im Punkte J' schneidet. Eine Parallele zu O_2 durch B schneidet dann auf der Lothrechten durch J' die Kraft V_2 ab, während D_2 von J' bis zu einer Parallelen zu O_3 reicht.

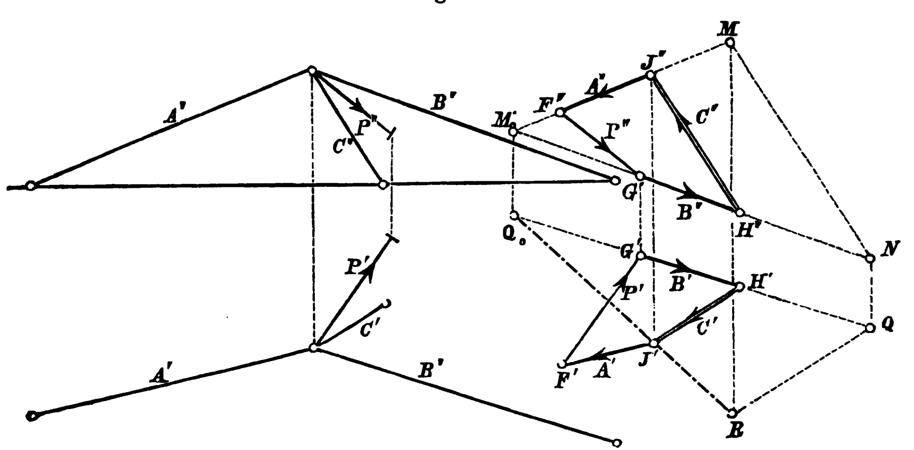
Die Kräftepläne für einseitige Belastung sind nach dem Mafsstabe $1^t = 4^{mm}$ gezeichnet.

Um nun aus den 3 Plänen $D_{2\,max}$ und $D_{2\,min}$ zu erhalten, verfährt man folgendermafsen. $D_{2\,g}$ erhält man aus Fig. 2b, indem man das D_2 für volle Last mit $g:(g+p)$ multiplicirt. Addirt man hierzu das D_2 des linksseitigen Kräfteplanes mit Berücksichtigung des gröfseren Mafsstabes, so erhält man $D_{2\,max}$, subtrahirt man aber von dem Drucke D_2 im rechtsseitigen Plane den Zug $D_{2\,g}$, so ergiebt sich der stärkste Druck. In gleicher Weise verfährt man mit den sonstigen Wandgliedern.

7. Spannkräfte im dreibeinigen Bockgerüste.

Drei nicht in einer Ebene liegende Gelenkstäbe seien mittels eines gemeinsamen Gelenkpunktes zu einem Bockgerüste, dem einfachsten Falle eines räumlichen Fachwerks, verbunden. In dem Gelenkpunkte greife eine Last P an. Die dadurch in den Stäben verursachten Kräfte A, B und C sollen ermittelt werden. Da die Anordnung eine räumliche ist, so muss in Grundriss und Aufriss gezeichnet werden (Fig. 69). A'', B'', C'' bezw. A', B', C'


Fig. 69.



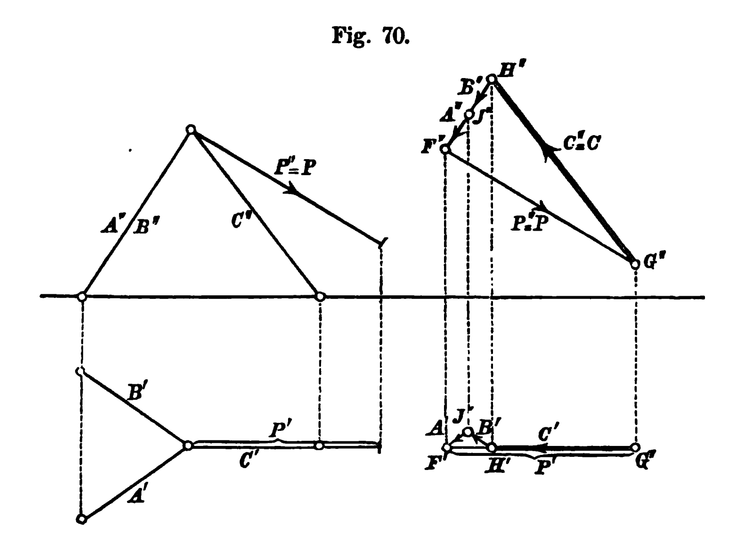
seien Aufriss bezw. Grundriss der 3 Gerüststäbe. Im gemeinsamen Gelenkpunkte greife eine Last $P = 1000^{\text{kg}}$, dargestellt durch 2^{cm}, an. Durch Herabschlagen der Richtungslinie von P und nachheriges Zurückschlagen sind die Längen der beiden Projektionen P' und P'' der Kraft so bestimmt, dass sie im Raume 2^{cm} Länge hat. Die 4 Kräfte P, A, B, C müssen im Gleichgewichte sein, müssen also, im Raum aneinander getragen, ein geschlossenes räumliches Kräfteviereck bilden. Die beiden Projektionen desselben müssen mithin ebenfalls geschlossene Vierecke sein. Um letztere zu erhalten, trage man zunächst P' und P'' von lothrecht über einander liegenden Punkten F' und F'' auf, dann liegen die Endpunkte G' und G'' auch auf einer Lothrechten. Zu jeder Projektion des Kräftevierecks sind nun aufser der einen Seite P' bezw. P'' die Richtungen der

3 anderen Seiten, parallel zu den Projektionen der Stäbe, gegeben. Hierdurch würde ein einzelnes der beiden Projektions-Vierecke nicht bestimmt sein. Die Bestimmung wird aber erreicht durch die Bedingung, dass in beiden Projektionen die entsprechenden Eckpunkte lothrecht über einander liegen müssen. $F' G' H' J'$ und $F'' G'' H'' J''$ sind die beiden Vierecke. F' und F'' sowie G' und G'' liegen der Konstruktion zufolge lothrecht über einander. Es müssen aber auch $J'' J'$ und $H'' H'$ Lothrechte sein. Man findet den Punkt J' (Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks; Centralblatt der Bauverwaltung 1891, S. 437) durch folgende Betrachtung: Die Punkte J'', H'', H' und J' bilden ein Trapez. J'' liegt auf einer durch F'' gezogenen Parallelen zu A'', H'' auf einer durch G'' gezogenen Parallelen zu B'', H' auf einer durch G' gezogenen Parallelen zu B', J' auf einer durch F' gezogenen Parallelen zu A', während $J'' H''$ und $J' H'$ parallel zu C'' bezw. C' sind. Man wähle nun für J'' erst einen beliebigen, also wahrscheinlich unrichtigen Punkt M auf der Richtung von A'', ziehe $MN \parallel C''$, NQ lothrecht, $QR \parallel C'$ und MR lothrecht. Dieses Trapez $MNQR$ genügt den Bedingungen für $J'' H'' H' J'$ nicht, weil R nicht auf A' liegt. Verschiebt man aber dieses Trapez derartig nach links, dass seine Seiten ihre Richtungen behalten, dass sich M auf A'', N auf B'' und Q auf B' bewegt, so verändert sich die Seitenlänge MN in demselben Verhältnisse wie der Abstand des Punktes M von dem Schnittpunkte M_0 der Richtungen A'' und B''. In demselben Verhältnisse vermindert sich aber auch QR. Daher muss R bei der Verschiebung ebenfalls eine Gerade beschreiben, u. zw. offenbar die Gerade RQ_0, wenn Q_0 lothrecht unter dem Schnittpunkte M_0 liegt. Schneidet nun $Q_0 R$ die A' in J', so ist J' ein Punkt des gesuchten Trapezes. Lothrecht darüber liegt J''. Man zieht $J'' H'' \parallel C''$; lothrecht unter H'' liegt H'. Damit sind die beiden Projektionen $F' G' H' J'$ und $F'' G'' H'' J''$ des Kraftecks gefunden. Die Pfeile der Spannkräfte A und B weisen, an die Stäbe verschoben, von dem gemeinsamen Gelenkpunkte weg, sind also Zugkräfte, während C einen Druck bedeutet. Die wahre Gröſse der Kräfte findet man nach den bekannten Regeln der darstellenden Geometrie.

Sehr einfach wird die Aufgabe, wenn die gegebene Kraft P mit einem Stabe, etwa C, eine Symmetrieebene für den Bock

bildet (Fig. 70). Legt man die Aufrissebene parallel zu dieser Symmetrie-Ebene, so decken sich A'' und B'', und P'' erscheint in der Gröfse der wahren Kraft P (hier 3 cm). Im Aufrisse kann man das Krafteck ohne Weiteres zeichnen, indem P mit C und

Fig. 70.



der Mittelkraft R aus A und B im Gleichgewichte sein muss, wobei der Aufriss von R, also R'', die gemeinsame Richtung von A'' und B'' hat. Es ergiebt sich also das Dreieck $F'' G'' H''$, worin $G'' H'' = C''$ schon den wahren Werth der Druckkraft C darstellt, während $H'' F'' = R''$ ist. Lothrecht unter H'' liegt im Grundrisse H', und $H' F' = R'$ wird in $H' J' = A'$ und $J' F' = B'$ zerlegt.

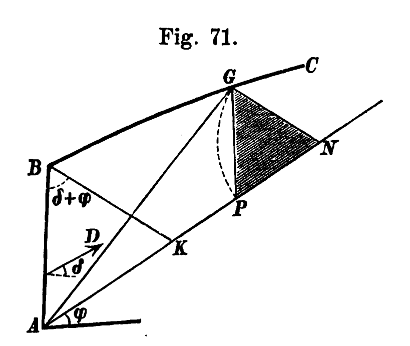
Siebenter Abschnitt.

Erddruck und Stützmauern.

1. Zeichnerische Bestimmung des Erddruckes.

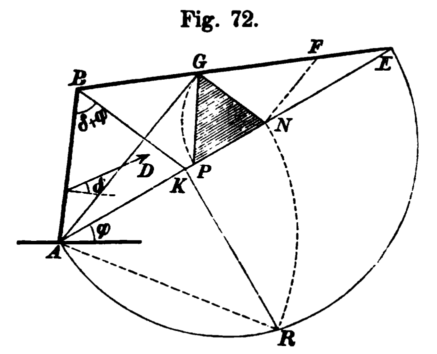
Hat eine ebene Wandfläche AB (Fig. 71) dem Druck eines Erdkörpers zu widerstehen, so wird die Voraussetzung gemacht, dass im Grenzzustande der Ruhe des Erdkörpers in demselben eine ebene Gleitfläche AG sich bildet, an der der volle Reibungswiderstand auftritt, so dass der Gesammtwiderstand W der Gleitebene von der Normalen zu letzterer um den vollen Reibungswinkel φ abweicht. Der Winkel, um welchen der Erddruck D von der Normalen zur Wandfläche abweicht, kann einstweilen unbestimmt (von φ abweichend) gelassen und mit δ bezeichnet werden. In den Anwendungen wird aber gewöhnlich $\delta = \varphi$ gesetzt. Ist nun der Erdkörper oben durch eine zur Bildebene rechtwinklig stehende Fläche BC begrenzt, so bestimmt sich die Gleitfläche nach Rebhann's Verfahren (Keck, Elasticitätslehre, S. 294 u. ff.) in folgender Weise: Man trägt in B den Winkel $\delta + \varphi$ von der Wandfläche AB ab, so dass $\measuredangle ABK = \delta + \varphi$, und nennt BK die Stellungslinie; legt ferner durch A eine natürliche Böschung. Zieht man nun die Gleitlinie AG probeweise und $GN \parallel BK$, so muss $ABG = AGN$ sein, wenn AG die Gleitlinie sein soll. Diese Bedingung kann nöthigenfalls durch Probiren erfüllt werden. Ist dies geschehen, so mache man $NP = NG$ und hat in dem Dreiecke PGN die

Fig. 71.



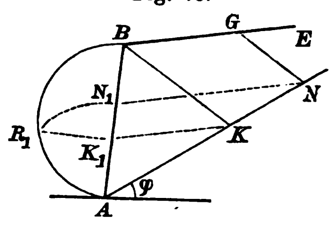
Darstellung von D auf eine Wandfläche von der Länge gleich Eins rechtwinklig zur Bildebene. Es ist nämlich $D = \gamma \cdot PGN$, wenn γ das Gewicht von 1 cbm Erde bedeutet. Bei **ebener Erdoberfläche** kann man die Gleitfläche ohne Probiren unmittelbar finden, indem man (Fig. 72) die durch A gelegte natürliche Böschung bis zum Schnittpunkte E mit der Oberfläche verlängert, über AE einen Halbkreis zeichnet, KR rechtwinklig zu AE zieht, $AN = AR$ macht und $NG \parallel BK$ zieht. Dann ist $AN^2 = AE \cdot AK$, was die Bedingung für Gleichheit der Flächen ABG und AGN ist. AG stellt dann die Gleitlinie dar und $\gamma \cdot PGN$ den Erddruck D. Verwandelt man PGN in ein Dreieck von der Höhe h der Wandfläche, so ist dieses Dreieck die Darstellung der Vertheilung des Druckes über die Wandhöhe. Der Angriffspunkt von D liegt in der Höhe $h/_3$ über A, d. h. in gleicher Höhe mit dem Schwerpunkte der Druckvertheilungsfigur.

Fig. 72.



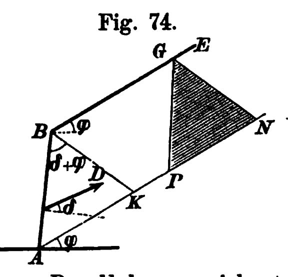
Ist der Punkt E für die Zeichnung nicht verwendbar (Fig. 73), so zieht man $KK_1 \parallel$ der Oberfläche und bestimme nun auf AB den Punkt N_1 so, dass $AN_1^2 = AK_1 \cdot AB$. Zieht man dann durch N_1 eine Parallele zur oberen Begrenzung, so bestimmt diese den Punkt N. Bei dieser Vergrößerung der proportionalen Theile wachsen aber auch die Fehler, und man möge daher nachträglich prüfen, ob auch N und B gleich weit von der Gleitebene AG abstehen.

Fig. 73.



Hat die Oberfläche die natürliche Böschung φ (Fig. 74), so fällt der Schnittpunkt E (Fig. 72) in unendliche Ferne, und es wird auch $AN = \infty$ und ebenfalls $BG = \infty$. Die Gleitfläche AG fällt dann offenbar mit AK zusammen. Das Erddruck-Dreieck PGN, welches nach dem bisherigen Verfahren in unendliche Ferne rücken würde, kann nun, weil GN und BK jetzt zwischen Parallelen liegen, an jeder beliebigen Stelle zwischen diesen Parallelen gezeichnet

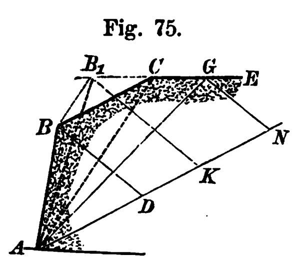
Fig. 74.



werden. Der Angriffspunkt des Erddrucks D liegt auch in diesem Falle im unteren Drittelspunkte der Wandfläche, und die Druckvertheilung erfolgt nach Dreiecksgesetz.

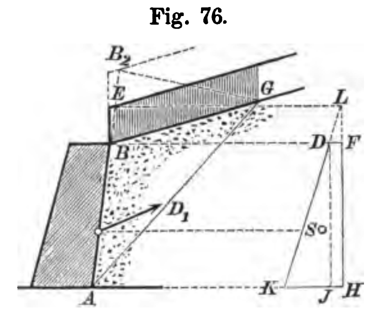
Ist der Querschnitt des durch die Gleitebene abzutrennenden Erdprismas nicht ein Dreieck, sondern ein Viereck (Fig. 75), so kann man, weil es (Fig. 71) nur auf die Gröfse, nicht auf die Form der Fläche ABG ankommt, das Dreieck ABC in ein solches AB_1C verwandeln, dessen Spitze B_1 auf der Verlängerung von EC liegt. Damit nun $AB_1G = AGN$ werde, hat man durch B_1 eine Parallele zur Stellungslinie BD zu ziehen und nun den Punkt K wie in Figur 72 zu benutzen. In diesem Falle ist nicht mehr D mit h^2 proportional, die Druckvertheilungsfigur nicht mehr ein geradliniges, sondern krummlinig begrenztes Dreieck (Keck, Elasticitätslehre, S. 291, Fig. 258).

Fig. 75.



Einfluss einer Belastung der Oberfläche. Ist die Oberfläche mit q f. d. Flächeneinheit der Horizontalprojektion belastet, so führe man q auf eine Erdhöhe $q:\gamma$ zurück und trage $q:\gamma$ als Belastungshöhe lothrecht über der Oberfläche auf (Fig. 76). Die Neigung der Gleitebene AG wird durch die Belastung nicht geändert. Man ermittele daher AG ohne Rücksicht auf q und ebenso auch den Erddruck D auf die Wandfläche AB ohne Ueberlast und stelle D durch das Dreieck DJK dar. Schneidet nun die Verlängerung von AB die obere Begrenzung der Lastdarstellung in E, so ziehe man durch E eine Wagerechte, welche die Dreieckseite KD in L trifft, und ziehe endlich LH lothrecht. Dann ist das Trapez $DFHK$ die Druckvertheilungsfigur für die Wandhöhe und der Angriffspunkt des Erddruckes D_1 mit Rücksicht auf die Belastung liegt in der Höhe des Trapez-Schwerpunktes S, also oberhalb des unteren Drittels der Wand. Das Rechteck $DFHJ$ ist wegen der Belastung

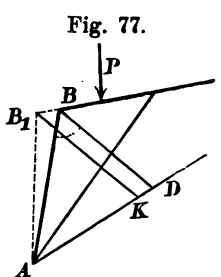
Fig. 76.



zu DJK hinzugekommen. Zu gleichem Ergebnisse gelangt man auch, wenn man die obere Begrenzung BG um BE parallel nach oben verschoben ansieht und für eine Wandfläche AE den Erddruck ermittelt, diesen durch das Druckvertheilungsdreieck LHK darstellt, von letzterem aber nur denjenigen Theil $DFHK$ berücksichtigt, welcher der Höhe der wahren Wandfläche AB entspricht.

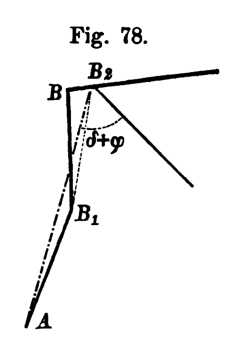
Erdkörper mit einer Einzellast P. Liegt die Einzellast P noch auf dem wahrscheinlichen Gleitprisma, so verwandele man sie in einen Erdkörper, der als Keil ABB_1 (Fig. 77) der Wandfläche AB vorgelegt wird. Die Stellungslinie BD ist, weil sie von der Neigung der wirklichen Wand abhängt, durch B zu ziehen. Für die Fläche des Erdprismas ist aber der Punkt B_1 bestimmend, daher hat man $B_1K \parallel BD$ zu ziehen und den Punkt K zu benutzen wie in früheren Fällen.

Fig. 77.



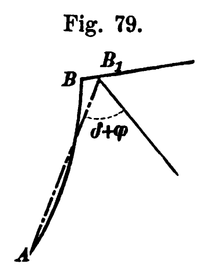
Der Erddruck auf geknickte Wandflächen kann nach einem von Winkler (Theorie des Erddruckes, S. 47) angegebenen Probirverfahren ermittelt werden, welches aber im Hinblick auf die grofse Unsicherheit der Bestimmung des wahren Erddruckes zu umständlich ist. Es dürfte genügen, den Knick B_1 (Fig. 78) durch eine von A aus gezogene Ausgleichungslinie AB_2 zu beseitigen, so dass $ABB_2 = ABB_1$, und nun den Druck auf die stellvertretende Wandebene AB_2 als annähernd gleich dem auf die wirkliche geknickte Wandfläche AB_1B kommenden anzusehen. Die Stellungslinie ist in diesem Falle von AB_2 aus unter dem Winkel $\delta + \varphi$ bezw. 2φ aufzutragen.

Fig. 78.



Eben so wird man zweckmäfsig eine gekrümmte Wandfläche AB (Fig. 79) durch eine Ebene AB_1 ausgleichen und den Erddruck für letztere ermitteln.

Fig. 79.



2. Untersuchung einer Stützmauer.

Ein $5^m = h$ hoher, oben durch eine Eisenbahn belasteter Erdkörper soll durch eine im Wesentlichen lothrechte Stützmauer gehalten werden. AB auf Tafel 4, Fig. 1 sei die 5^m hohe Wandfläche in 1 : 100. Die Eisenbahn-Belastung werde durch die Ueberdeckung BB_1 von 1^m Höhe dargestellt. Der natürliche Böschungswinkel sei 30^0, ebenso der Reibungswinkel δ an der Wand. Dann ist jetzt die Wagerechte durch B_1 als obere Begrenzung zu betrachten. Diese schneidet sich mit der durch A gelegten natürlichen Böschung in E. Man zieht durch B_1 die Stellungslinie B_1K, unter 60^0 gegen die Wandfläche geneigt, und bestimmt mittels eines Halbkreises über AE den Punkt N so, dass $AN^2 = AK \cdot AE$ zieht $NG \parallel B_1K$ und mache $NP = NG$, dann ist GNP das Druckdreieck. Dieses verwandelt man in ein solches von der Höhe AB_1, trägt dessen Grundlinie $= HJ$ auf und hat in LHJ die Druckvertheilungs-Figur, von welcher aber nur das Trapez $FDJH$ längs der Mauerhöhe AB Gültigkeit besitzt. Diese Druckvertheilungs-Fläche müsste mit der Erddichte $\gamma = 1600$ multiplicirt werden, um den Erddruck zu liefern. Wir nehmen die Dichtigkeit γ_1 der Mauer $= \frac{5}{4}\gamma = 2000$ an und führen die Druckvertheilungs-Figur dadurch auf die Einheit γ_1 zurück, dass wir $HJ_1 = \frac{4}{5}HJ$ als neue Grundlinie benutzen, sonach mit dem Trapeze FD_1J_1H zu thun haben. Der Schwerpunkt s_5 dieser Figur giebt die Höhenlage des Angriffspunktes des Erddruckes D_5 für die Wandfläche AB.

Die annähernd erforderliche untere Mauerdicke d kann nun nach der Formel

$$d^2 + 2\,d\left(\frac{a_2}{2} - a - \frac{2\,D\cos(\alpha+\varphi)}{\gamma_1 b}\right) = a_1^2 + a^2 + \frac{6\,D\,e\cos\varphi}{\gamma_1 h \sin\alpha}$$

(Keck, Elasticitätslehre, S. 301) berechnet werden. Darin bedeutet a_1 den äufseren Anlauf der Mauer, der hier zu $\frac{1}{5}h = 1^m$ angenommen wurde. Der innere Anlauf a ist $= 0$, weil der Winkel α von AB gegen die Wagerechte $= 90^0$ ist. Ferner ist $\varphi = 30^0$, $\gamma = 0{,}8\,\gamma_1$; e die Höhe des Angriffspunktes von D über A. Setzt man die entsprechenden Werthe ein, so ergiebt sich rund $d = 2^m$, wofür

wir aber, weil eine Unterschneidung der Mauer auf der Rückseite beabsichtigt wird, welche günstig auf die relative Lage des Spannungsmittelpunktes wirkt, $d = 1{,}8^{\text{m}} = AD$ wählen. Die Fugen sollen rechtwinklig zur Aufsenfläche stehen. Wir theilen die Wandhöhe in 5 gleiche Theile, ziehen von dem Theilpunkte Q aus eine Parallele zur Aufsenfläche. Der Punkt L der Grundmauer liegt 1^{m} tief; DL bekommt einen stärkeren Anlauf als der äufsere Theil, und hiernach ist die Mauerfläche $BCDLMQ$ festgelegt.

Da die Wandfläche MQB nun geknickt ist, müsste der Erddruck eigentlich nach S. 88 neu bestimmt werden. Dies scheint aber nicht erforderlich, weil der Erddruck durch die Unterschneidung nur eine Verminderung erfährt. Wir setzen daher das Druckvertheilungs-Trapez FD_1J_1H stetig bis zur Tiefe des Punktes M nach unten fort.

Die Bestimmung der Spannungsmittelpunkte U der einzelnen Fugen soll an der Fuge QR besprochen werden. Der Gesammtdruck D_4 auf die Wandhöhe BQ wird durch den entsprechenden Theil des Drucktrapezes mit dem Schwerpunkte s_4 dargestellt. Jede Quadrateinheit des Trapezes wie des Mauerquerschnittes ist mit einer Kraft γ_1 behaftet anzusehen. γ_1 werde durch 5^{mm} im Kräfteplane dargestellt. Wegen des Längenmafsstabes 1:100 ist also 1^{qcm} der Figuren durch 5^{mm} Länge aufzutragen. Der Erddruck D_4 auf QB ist hiernach durch die Strecke XY dargestellt, das Gewicht des über QR liegenden Mauertheils ebenso durch $G_4 = YZ$. In dem Mauerquerschnitte schneiden sich die Richtungslinien von G_4 und D_4 in T_4; zieht man nun durch T_4 eine Parallele zu XZ im Krafteck, so schneidet diese die Fuge QR im Spannungsmittelpunkte U_4. In gleicher Weise verfährt man mit den höher liegenden Theilfugen, so dass die einzelnen Konstruktionen von einander ganz unabhängig sind.

Das Mauerstück $DPQR$ ist rechteckig, die Grundmauer $DPML$ wieder trapezförmig. Zur Bestimmung der Schwerpunkts-Senkrechten ist daher mit dem Pole O und den Gewichten G_4, G_5 und G_6 ein Kraft- und Seileck gezeichnet. Das Gesammtgewicht des über der Fuge DP stehenden Mauertheils schneidet sich mit D_5 in T_5 und bestimmt den Spannungsmittelpunkt U_5 der Fuge DP. In entsprechender Weise findet man den Spannungsmittelpunkt U_6 der Grundfläche LM.

Die stärkste Spannung ist bei D zu erwarten. U_5 liegt etwas aufserhalb des Kernes. Ist $D\,U_5 = t$, so ist $z = 3\,t = 1{,}4^{\,m}$ die wirksame Breite der Fuge, wenn diese keine Zugfestigkeit hat. Der Normaldruck N der Fuge ist leicht im Krafteck konstruirt, indem man den Gesammtdruck R_5 der Figur parallel und rechtwinklig zur Fuge zerlegt. Die Vertheilung von N über die Breite z erfolgt nach Dreiecksgesetz, und die stärkste Druckspannung wird $\sigma'' = 2 \cdot N : z = 2 \cdot 9{,}8 \cdot \gamma_1 : 1{,}4 = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 2000 : 1{,}4 = 28\,000\,{}^{kg}/_{qm} = 2{,}8^{\,at}$, (dargestellt durch $1{,}4^{\,cm}$).

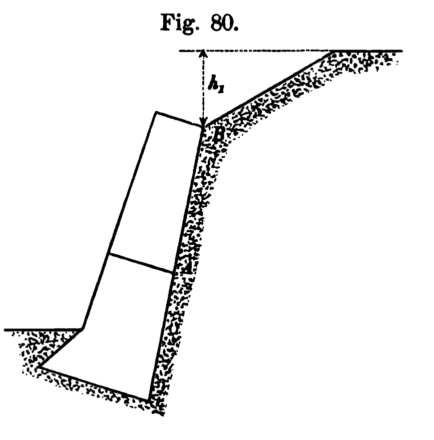
Der Spannungsmittelpunkt U_6 der Grundfläche $L\,M$ liegt innerhalb des Kernes der Fuge. Seine Excentricität beträgt $c = 0{,}2^{\,m}$, während die Grundfläche eine Breite $d = 1{,}9^{\,m}$ hat. Der Normaldruck ergiebt sich aus dem Krafteck zu $12{,}7\,\gamma_1$. Danach kann man die Kantenpressungen σ'' bezw. σ' bei L und M leicht berechnen zu

$$\frac{12{,}7 \cdot 2000}{1{,}9}\left(1 \pm \frac{6 \cdot 0{,}2}{1{,}9}\right)$$

(Keck, Elasticitätslehre, S. 152), das giebt $\sigma'' = 2{,}18^{\,at}$, $\sigma' = 0{,}49^{\,at}$, wie unterhalb $L\,M$ aufgetragen.

Bei einer unterschnittenen Mauer ist zu beachten, dass sie auch ohne Erdhinterfüllung noch standfest sein soll. Das Gesammtgewicht G schneidet hier die Grundfläche noch in genügendem Abstande von M, da die stärkste Kantenpressung (bei M) sich zu $3{,}13^{\,at}$ ergiebt.

Fig. 80.



Hat der zu stützende Erdkörper eine endliche Ueberhöhung h_1 (Fig. 80), so kann der gesammte Erddruck auf einen von B bis zu einer beliebigen Stelle A reichenden Theil der Stützwand nach S. 87 konstruirt werden. Die Druckvertheilungsfigur ist nun aber, wie schon a. a. O. erwähnt, nicht mehr geradlinig begrenzt und wird dann überhaupt nicht mehr vortheilhaft benutzbar. Für jede

zu untersuchende Fuge A muss in diesem Falle der Druck auf den darüber liegenden Theil der Wand nach dem Rebbann'schen Verfahren in der Form $D = \gamma \cdot G N P$ selbständig ermittelt werden. Man stellt die einzelnen Drücke dann im Kraftecke durch Strecken dar. Die weitere Behandlung der Stützmauer ist dieselbe, wie in dem vorstehenden Beispiele.

Achter Abschnitt.

Tonnengewölbe.

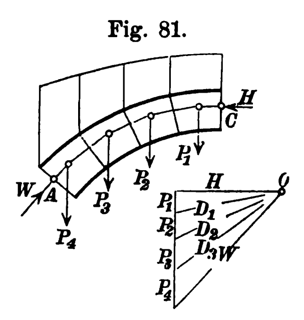
---

1. Drucklinie eines Gewölbes.

Ein Gewölbe mit geschlossenen Fugen, welches sich mit vollen Flächen gegen Widerlager stützt, ist 3 fach statisch unbestimmt. Von jedem der beiden Kämpferdrücke W und W_1 sind nämlich unbekannt: Gröfse, Richtungswinkel und Excentricität des Angriffspunktes. Daraus ergeben sich 6 Unbekannte, denen nur 3 verfügbare Gleichgewichts-Bedingungen gegenüber stehen.

Drucklinie eines symmetrisch angeordneten und belasteten Gewölbes bei gegebenem Scheiteldrucke. Ist das Gewölbe völlig symmetrisch zu einer lothrechten Mittelebene (Fig. 81) und betrachtet man letztere als Schnittfläche für das Gewölbe, so muss die an diesem Schnitte auftretende Spannkraft eine wagerechte Druckkraft H sein (nach dem Gesetze der Wechselwirkung und mit Rücksicht auf die Symmetrie). Wäre diese Kraft H nach Gröfse und Lage bekannt, so würden die Spannungsverhältnisse des Gewölbbogens völlig bestimmbar sein.

Fig. 81.

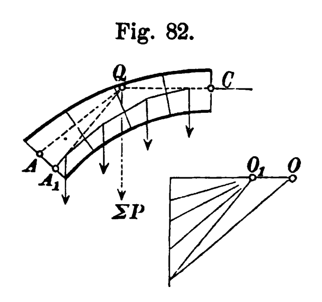


Man theile nämlich die Gewölbhälfte (deren Länge rechtwinklig zur Bildebene gleich Eins sein mag) durch Fugen in mehrere (z. B. 4) Theile, welche Gewölbsteine genannt werden können, stelle die auf die einzelnen Steine kommenden Belastungen (Uebermauerung, Ueberschüttung u. dgl.) durch Flächen dar,

welchen die gleiche Dichtigkeit γ_1 wie den Steinfiguren beigelegt wird, und vereinige das Gewicht jedes Gewölbsteines mit der auf ihm liegenden Last zu den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4. Setzt man nun den Scheiteldruck H mit den Kräften P unter Anwendung von Krafteck und Seileck zusammen, indem man die Kraft H als Polabstand wählt und der ersten Last P_1 vorausgehen lässt. so geben die Polstrahlen des Kraftecks die Drücke $D_1\, D_2\, D_3$ der Zwischenfugen und den Widerlagerdruck W nach Gröfse und Richtung an, während die dazu parallelen Seiten des Seilecks die Lagen dieser Kräfte zeigen. Es beruht dies darauf, dass an jedem Gewölbsteine die beiden Fugendrücke mit dem Gewichte P im Gleichgewichte sein müssen. Der Schnittpunkt einer Seite des Seilecks mit der entsprechenden Fuge ist der Spannungsmittelpunkt der letzteren. Mit diesem und der Gröfse und Richtung des in ihm angreifenden Druckes ist dann die Vertheilung der Spannung über die Fuge nach der Lehre vom excentrischen Druck (S. 41) gegeben.

Die angenommene Gröfse und Lage von H liefert den Angriffspunkt A des Kämpferdrucks W. Das Seileck ist aber auch bestimmt, wenn statt der Gröfse von H der Spannungsmittelpunkt A der Kämpferfuge gegeben ist. In diesem Falle nehme man (Fig. 82) für den Scheiteldruck zunächst eine beliebige Gröfse H_1 an, zeichne mit dem Pol O_1 das Krafteck und, mit dem gegebenen Punkte C beginnend, das Seileck, dessen letzte Seite die Kämpferfuge im Allgemeinen nicht in dem gegebenen Punkte A, sondern an einer anderen Stelle A_1 schneiden wird. Man kann dann leicht Kraft- und Seileck so abändern, dass der gegebenen Bedingung genügt wird. Wird der Scheiteldruck nur der Gröfse nach verändert, nicht aber nach Richtung und Lage, so wird der endgültige Pol O in einer Wagerechten durch O_1 liegen, und die Polarachse (s. S. 15) der beiden Seilecke wird die Wagerechte durch C sein. Auf ihr müssen sich je 2 entsprechende Seiten des ersten und des zweiten Seilecks schneiden. Die durch A_1 gehende letzte Seite des ersten Seilecks schneidet die Polarachse in Q, daher ist QA die letzte Seite des zweiten Seilecks.

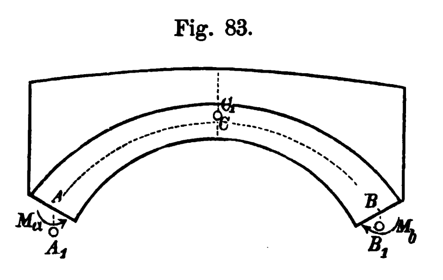
Fig. 82.



Zieht man durch den unteren Endpunkt des Kraftecks eine Parallele zu QA, so geht diese durch den neuen Pol O und bestimmt damit die Gröfse des Scheiteldruckes H. Dem Punkte A entspricht auf der rechtsseitigen Gewölbhälfte ein symmetrischer Punkt B. Es ist also durch diese 3 Punkte A, B, C das Seileck völlig bestimmt, wie ja auch aus dem Früheren bekannt, und damit liegt auch der Spannungszustand des Gewölbes völlig fest. Wird die Zahl der Schnitte gröfser und gröfser, so wird aus dem Seileck die Drucklinie des Gewölbes. Solange die 3 Punkte A, B und C nicht bekannt sind, lassen sich zu den Gewichten der Gewölbtheile unendlich viele verschiedene Seilecke zeichnen, die auch unendlich vielen verschiedenen Spannungszuständen entsprechen.

Zur Lösung dieser Unbestimmtheit dient nun (Keck, Elasticitätslehre, S. 334) Dr. E. Winkler's Satz: Unter Vernachlässigung des Einflusses, den die Verkürzung der Mittellinie des Bogens durch die Längskraft N ausübt, und bei überall gleichem Querschnitt ist unter allen statisch möglichen Drucklinien diejenige die richtige, welche sich der Mittellinie durchschnittlich am meisten nähert, wenn man das Wort „durchschnittlich" im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate deutet. Ist die Mittellinie des Gewölbes selbst eine statisch mögliche Drucklinie, so würde sie unter Vernachlässigung der Verkürzung des Gewölbbogens die wahre Drucklinie sein. In jeder Fuge würde dann ein vollkommen centrischer Druck, mithin eine gleichmäfsige Spannungsvertheilung stattfinden. Ein so geformtes Gewölbe heifst ein Drucklinien-Gewölbe. Die Verkürzung der Mittellinie des Bogens hat aber ungefähr dieselbe Wirkung wie ein Ausweichen der Widerlager bei gleichbleibender Länge des Gewölbbogens. Jede Gewölbhälfte dreht sich am Widerlager nach innen. In Folge dessen rückt der Angriffspunkt des Scheiteldruckes um $c = CC_1$ in die Höhe (Fig. 83). Zieht man aber durch die Mitten A und B der Kämpferfugen Lothrechte und trägt auf diesen die Strecken $AA_1 = t_a$ und $BB_1 = t_b$ nach unten ab, so gehen die Kämpfer-

Fig. 83.



drücke durch A_1 bezw. B_1 hindurch. Die Längen c, t_a und t_b ergeben sich, je nach der Belastungsart, aus der Elasticitätslehre. Bei einem Drucklinien-Gewölbe mit unveränderlicher Belastung ist (Keck, Elasticitätslehre, S. 337) $c = \frac{1}{3}\frac{d^2}{f}$ zu setzen, wenn f die Pfeilhöhe der Mittellinie, d die mittlere Gewölbstärke; $t_a = t_b = 2\,c$.

2. Untersuchung eines Brückengewölbes.

Ein Brückengewölbe trägt an ständiger Last sein eigenes Gewicht (Dichte γ_1), sowie eine Erdüberschüttung (Dichte γ), deren Höhe zweckmäfsig durch Multiplikation mit $\gamma : \gamma_1$ mittels eines Verkleinerungs-Mafsstabes auf Mauerwerk zurückgeführt wird. Die hierdurch entstehende obere Begrenzungslinie (Belastungslinie) weicht in den meisten Fällen nicht viel von einer wagerechten Geraden ab. Dazu kommt dann noch eine bewegliche Belastung p, welche ebenfalls in Mauerwerksbelastung ausgedrückt wird. Wegen dieser beweglichen Last p empfiehlt es sich, die Mittellinie des Gewölbes nach einer Drucklinie zu formen, welche einer über die ganze Spannweite erstreckten Belastung mit $^1/_2\,p$ (neben der ständigen Last) entspricht (Keck, Elasticitätslehre, S. 344). Die weitere Behandlung eines solchen Gewölbes möge an demselben Beispiele durchgeführt werden, welches auch in der Elasticitätslehre (S. 344) berechnet wurde.

Die Spannweite der inneren Leibung beträgt 10^{m}, ihre Pfeilhöhe $3\,^1/_3{}^{\mathrm{m}}$. Die Scheitelstärke werde nach den dort erhaltenen Ergebnissen zu $d_0 = 0{,}66^{\mathrm{m}}$, die Kämpferstärke zu $d_1 = 1{,}0^{\mathrm{m}}$ angenommen. Die Belastungshöhe im Scheitel beträgt $y_0 = 1{,}4^{\mathrm{m}}$, die bewegliche Last $p = 1^{\mathrm{m}}$ ($\gamma = 1600$; $\gamma_1 = 2000$). Die innere Leibung ist nach einer Hagen'schen Drucklinie für $y_0 + {}^1/_2\,p = 1{,}9^{\mathrm{m}}$ Scheitelbelastung geformt. Die Koordinaten von 10 Punkten derselben sind, bezogen auf die Mitte der Belastungslinie:

$x = 0$	0,60	1,20	1,80	2,40	2,99	3,59	4,19	4,79	5,00
$y = 1{,}9$	1,94	2,05	2,25	2,54	2,93	3,44	4,09	4,90	5,23.

Die Veränderlichkeit der Gewölbestärke wurde so bemessen, dass bis in die Nähe des Kämpfers die lothrechte Projektion

der Fugenlänge gleich der Gewölbestärke d_0 im Scheitel ist. In der Nähe des Kämpfers aber wurde die Zunahme ermäßigt, so dass $d_1 = 1^{m}$ entsteht.

Das Gewölbe ist auf Taf. 4, Fig. 2 und 3 in 1 : 100 dargestellt.

Zunächst wurde auf der linken Hälfte der Fig. 2 ein Seileck gezeichnet für den Fall, dass zur ständigen Last noch eine symmetrische Last $\frac{1}{2} p$ hinzutritt. Dem entspricht die Belastungslinie DE. Die Lastfigur ist in lothrechte Streifen von $\frac{1}{2}{}^{m}$ Breite zerlegt, nur über der Kämpferfuge beträgt die Breite fast $0{,}9^{m}$. Die Dichte des Mauerwerks $\gamma_1 = 2000\,{}^{kg}/_{cbm}$ dient als Einheit der Kräfte und ist durch 2^{mm} im Kräfteplane dargestellt. 1^{qcm} der Lastfigur entspricht also 2^{mm}. Die mittleren Höhen der Streifen von $\frac{1}{2}{}^{m}$ sind einfach auf 1 Zehntel verkleinert (mittels Verkleinerungs-Maßstabes) und bilden die untere Hälfte des Kräfteplanes.

Mit einem beliebigen Pole O wurde unterhalb der Gewölbefigur ein Seileck gezeichnet und dadurch die Schwerpunkts-Lothrechte der linken Hälfte gefunden. Eine Wagerechte durch die Mitte C der Scheitelfuge schneidet jene Lothrechte in einem Punkte Q, durch den die von A aus zu ziehende letzte Seite des gesuchten Seilecks hindurchgehen muss. Diese ist hierdurch bestimmt und legt nun den Pol O_1 fest, welcher ein durch C und A gehendes Seileck liefert. Dieses Seileck stimmt mit der vorläufig gezeichneten Mittellinie des Gewölbes genügend überein, so dass diese beibehalten werden konnte.

Auf der rechten Seite der Figur 2 wurde dann ein Seileck für volle Last, entsprechend der Belastungslinie $E_1 D_1$, gezeichnet, zu welcher die Punkte C_1 und B_1 nach S. 95 berechnet werden müssen. Die mittlere Gewölbestärke beträgt $\frac{1}{2}(0{,}66 + 1) = 0{,}83^{m}$, die Pfeilhöhe der Mittellinie nach Zeichnung $f = 3{,}45^{m}$, mithin wird $c = \frac{1}{3}\frac{d^2}{f} = 0{,}067^{m} = C C_1$. Danach $t_a = B B_1 = 2c = 0{,}134^{m}$. Hiermit liegen die Punkte C_1 und B_1 fest. Die Laststreifen sind wiederum, auf $\frac{1}{10}$ verkleinert, im oberen Theile des Kräfteplanes aufgetragen; nur der letzte Streifen rechts 1,8 Mal größer, wegen der größeren Breite. Hiernach erfolgte in derselben Weise, wie soeben hinsichtlich des Seilecks CA beschrieben, die Zeichnung des Seilecks $C_1 B_1$ mit dem Pole O_2.

Der Scheiteldruck beträgt $12\gamma_1 = 24000^{kg}$. Die stärkste Spannung im Scheitel wird daher wegen $c = 0{,}067$ und $d_0 = 0{,}66^{m}$:

$$\sigma'' = \frac{2{,}4}{0{,}66}\left(\frac{6 \cdot 6{,}7}{66} + 1\right) = 5{,}8^{at}.$$

Die stärkste Spannung am Kämpfer wird, weil der Kämpferdruck $24{,}5\gamma_1 = 49000^{kg}$, seine Excentricität ebenfalls (nach Zeichnung) $0{,}067^{m}$, die Fugenbreite $1{,}0^{m}$,

$$\sigma'' = \frac{4{,}9}{1{,}0}\left(\frac{6 \cdot 6{,}7}{100} + 1\right) = 6{,}9^{at}.$$

Der ungünstigste Belastungsfall eines Brückengewölbes ist die einseitige Belastung (Fig. 3), wo die eine Hälfte mit p bedeckt, die andere davon frei ist. Die entsprechende Drucklinie geht (Keck, Elasticitätslehre, S. 342) durch 3 Punkte C_1, A_2 und B_2, von denen C_1 ebenso liegt, wie im vorstehenden Falle. Die Abstände $AA_2 = t_a$ und $BB_2 = -t_b$ ergeben sich aber nach folgenden Formeln.

Man berechnet zunächst die Hülfsgröfse

$$\zeta = \frac{d^2}{f^2} = \frac{0{,}83^2}{3{,}45^2} = 0{,}0579,$$

dann vorläufig den Scheitelschub

$$H_1 = \frac{r\,(y_0 + \tfrac{1}{2}p)}{1 + \zeta} = \frac{5{,}67 \cdot 1{,}9}{1{,}0579} = 10{,}175^{cbm},$$

worin $r = 5{,}67^{m}$ (nach der Zeichnung) den Krümmungshalbmesser der Mittellinie des Gewölbes im Scheitel bedeutet. Hiernach das linksseitige Kämpfermoment:

$$M_a = \frac{1}{8} p f r + \frac{2}{3} H_1 f \zeta$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 3{,}45 \cdot 5{,}67 + \frac{2}{3} \cdot 10{,}175 \cdot 3{,}45 \cdot 0{,}0579$$

$$= 2{,}445 + 1{,}3557 = 3{,}8007$$

$$M_b = -2{,}445 + 1{,}3557 = -1{,}0893.$$

Dann ist

$$t_a = \frac{M_a}{H_1} = 0{,}3733^{m};\quad t_b = \frac{M_b}{H_1} = -0{,}107^{m}.$$

Hiermit liegen die 3 Punkte C_1, A_2 und B_2 für das Seileck fest. Das Krafteck wird in bekannter Weise aufgetragen und zu einem beliebig gewählten Pole O ein von A_2 ausgehendes Seileck gezeichnet. Lothrechte durch C_1 und B_2 schneiden das Seileck in C_3 und B_3. Nach S. 21 hat man nun zu den Schluss-

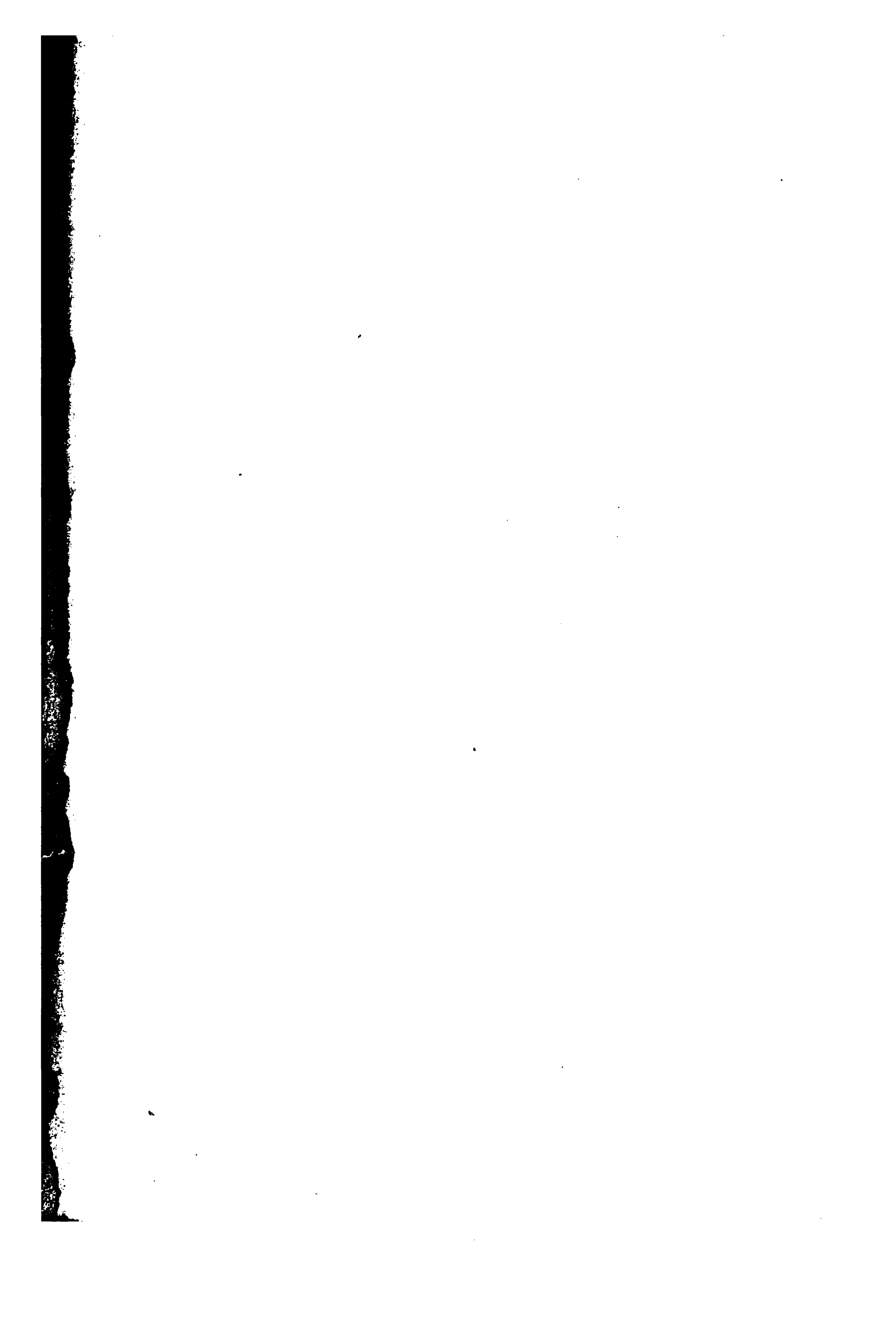
linien $A_2 C_3$ und $B_3 C_3$ parallele Polstrahlen $O T_1$ bezw. $O T_2$ zu ziehen. Zeichnet man dann noch die endgültigen Schlusslinien $A_2 C_1$ bezw. $C_1 B_2$ und dazu die Parallelen durch T_1 und T_2, so schneiden sich diese in dem richtigen Pole O_1, und die durch A_2 gehende Polarachse ist parallel mit $O O_1$, muss aber auch durch den Schnittpunkt der Schlusslinien $C_1 B_2$ und $B_3 C_3$ gehen. Mit dem Pol O_1 erhält man nun das richtige Seileck. Dasselbe bleibt im mittleren Drittel des Gewölbes. Der linksseitige Kämpferdruck lässt sich abgreifen zu $24{,}5\,\gamma = 45\,000^{\text{kg}}$. Er geht etwa durch die Grenze des mittleren Drittels, daher ist die stärkste Druckspannung

$$\sigma'' = \frac{2 \cdot 4{,}5}{1{,}0} = 9^{\text{at}}.$$

Etwa 1^{m} links vom Scheitel tritt die Drucklinie auch an die Grenze des mittleren Drittels. Der Fugendruck beträgt dort $19\,500^{\text{kg}}$, die Fugenbreite $0{,}675^{\text{m}}$, so dass die stärkste Druckspannung wird

$$\sigma'' = \frac{2 \cdot 1{,}95}{0{,}675} = 5{,}8^{\text{at}}.$$

Die Spannungsvertheilung dieser beiden Fugen ist mit $1^{\text{at}} = 1^{\text{mm}}$ in Nebenfiguren gezeichnet.



Kern ein
se.

Grundlinie fü
Flächen-Verwan
$d = 4^{cm}$.

M

u

a

J_x J_1



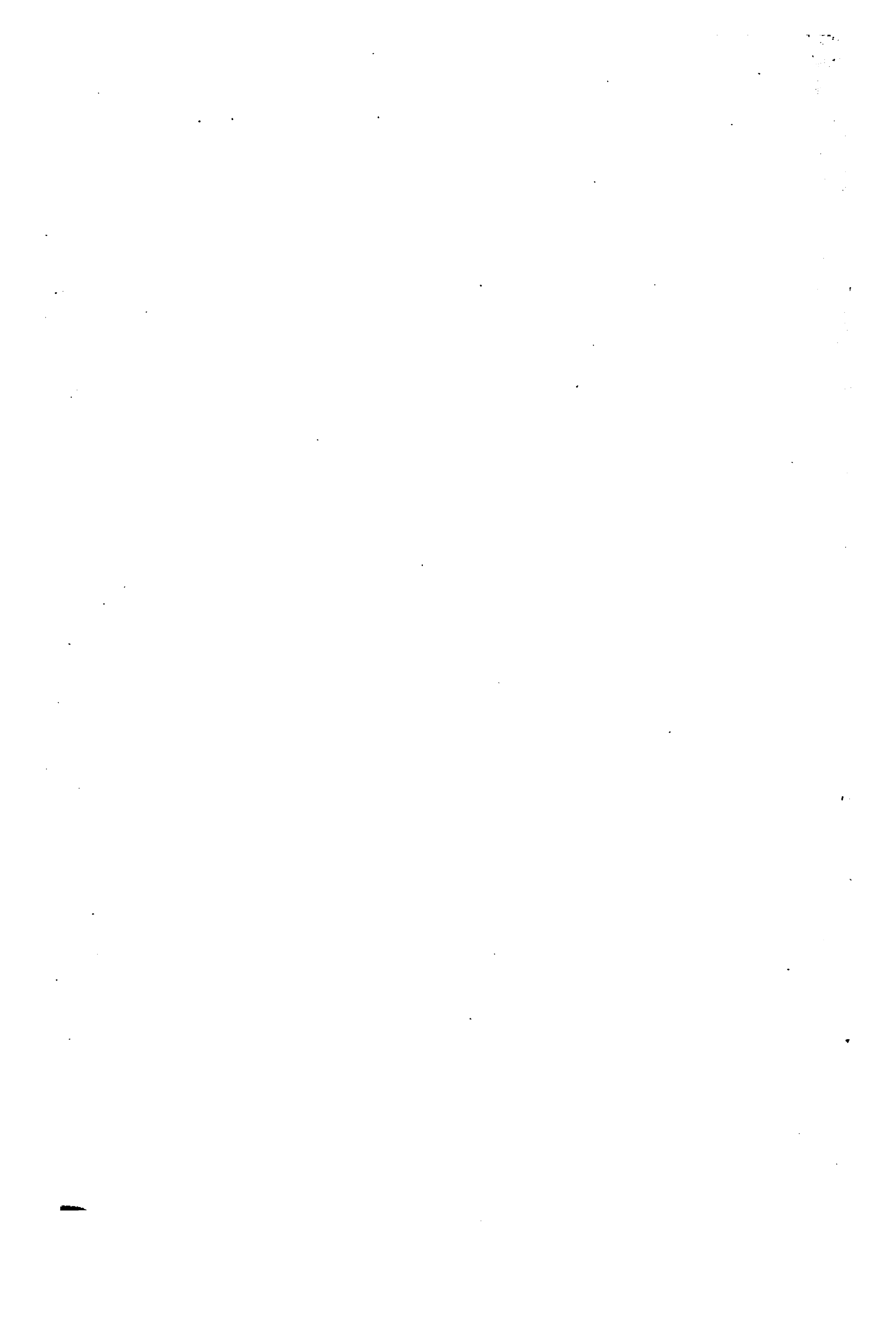
pfeilers;

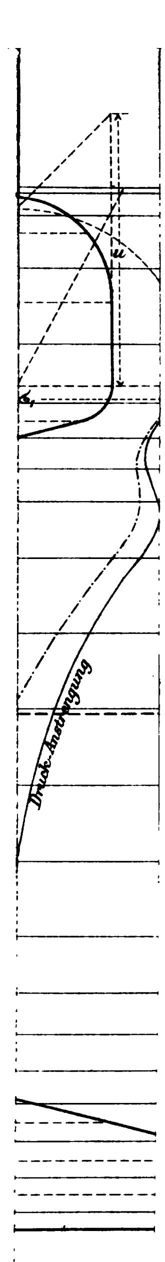
U

J_y

R

3m





ber Graphische

zmauer von 5
dkörper. 1:100.

1:100.

4 5



